### JAROSŁAW KNABEL

### ANALIZA NIEZAWODNOŚCI KONSTRUKCJI SPRĘŻYSTO–PLASTYCZNYCH PRZY UŻYCIU POWIERZCHNI ODPOWIEDZI

6/2004

WARSZAWA 2004

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 października 2004 r.

#### **Promotor**:

Prof. dr hab. MICHAŁ KLEIBER

#### Recenzenci:

Prof. dr hab. PAWEŁ ŚNIADY Doc. dr hab. Krzysztof Doliński

#### Redaktor naczelny:

Prof. dr hab. JÓZEF JOACHIM TELEGA



Praca doktorska

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN Nakład 100 egz. Ark. druk.: 10 Oddano do druku w listopadzie 2004 r.

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Piaseczno, ul. Geodetów 47A

#### Podziękowania

Składam podziękowanie za finansowanie prowadzonych przeze mnie badań przez Komitet Badań Naukowych w ramach grantu promotorskiego (KBN nr 8 T07A 039 21), oraz przez Fundację na Rzecz Nauki Polskiej (FNP nr 4/2001) w ramach pracy w zespole laureata subsydium profesorskiego Pana Profesora dr hab. M. Kleibera.

Składam serdeczne podziękowania wszystkim osobom, które przyczyniły się do powstania niniejszej rozprawy. Przede wszystkim gorąco dziękuję Panu Profesorowi dr hab. M. Kleiberowi za opiekę naukową oraz cenne uwagi merytoryczne. Pragnę również gorąco podziękować Panu Profesorowi dr. hab. K. Dolińskiemu oraz Panu dr inż. A. Siemaszce za przedyskutowanie wielu zagadnień oraz wartościową współpracę.

Szczególne podziękowania chciałbym wyrazić również Panu mgr inż. G. Bielawskiemu oraz Panu mgr inż. P. Tauzowskiemu za wkład pracy w rozwijanie i modyfikację swoich programów komputerowych, CYCLONE oraz FEMLIB, które stały się istotnymi składnikami systemu umożliwiającego złożoną analizę konstrukcji.

## Spis treści

Sti	reszczenie	7
1.	Wstep	9
	1.1. Cel i zakres pracy	9
	1.2. Przegląd literatury	11
2.	Analiza konstrukcji sprężysto-plastycznych	15
	2.1. Model materiału	15
	2.2. Model obciążeń	17
	2.3. Związki opisujące zachowanie się konstrukcji	19
	2.4. Twierdzenia klasyczne teorii przystosowania	20
	2.5. Metoda min–max	22
	2.5.1. Metoda min–max w programie CYCLONE	24
3.	Wybrane metody analizy niezawodności konstrukcji	27
	3.1. Wprowadzenie	28
	3.1.1. Gaussowska przestrzeń standardowa $\mathcal U$	30
	3.1.2. Wskaźnik niezawodności Cornella	33
	3.1.3. Wskaźnik niezawodności Hasofera–Linda	33
	3.2. Metoda pierwszego rzędu (FORM)	34
	3.3. Metoda drugiego rzędu (SORM)	39
	3.4. Metoda Monte Carlo	44
	3.5. Metoda "importance sampling"	45
4.	Metoda powierzchni odpowiedzi (MPO)	<b>49</b>
	4.1. Liniowa analiza regresji	49
	4.2. Ogólna postać regresji	54
	4.3. Planowanie eksperymentów	59
5.	Wybrane algorytmy analizy niezawodności przy użyciu MPO	67
	5.1. Algorytm MPO	67

.

	<ol> <li>5.2.</li> <li>5.3.</li> <li>5.4.</li> <li>5.5.</li> <li>5.6.</li> </ol>	MPO bazująca na standardowym rozwiązaniu MNK	71 72 76 79 81				
		ły w ramach projektu ASRA–HPC 5 programu ramowego UE	85				
6.	Ana	aliza niezawodności konstrukcji sprężysto–plastycznych					
	z wykorzystaniem MPO						
	6.1.	Opis stochastyczny obciążeń	91				
	6.2.	Definicja niezawodności konstrukcji sprężysto–plastycznych	94				
	6.3.	Idea MPO w analizie niezawodności konstrukcji sprężysto–plastycznych	96				
	6.4.	Przykłady	102				
		6.4.1. Przykład analizy niezawodności przystosowania oraz nośności granicznej belki	102				
		6.4.2. Przykład analizy niezawodności przystosowania oraz nosności granicznej zadania osiowo–symetrycznego	111				
7.	Wn	ioski 1	L <b>17</b>				
Lit	literatura 1						

### Streszczenie

Niniejsza praca zawiera propozycję metody powierzchni odpowiedzi umożliwiającej efektywną analizę niezawodności przystosowania oraz w pewnym zakresie analizę niezawodności nośności granicznej. Proponowana metoda bazuje na możliwości skutecznego wyznaczania wartości mnożnika obciążenia za pomocą procedury min-max. Analizę zadań inżynierskich umożliwiły założenia upraszczające opis zmienności obciążeń w modelu mechanicznym, oraz konsekwentne do nich założenia upraszczające opis stochastyczny obciążeń

W niniejszej pracy zaprezentowano także ogólną metodę powierzchni odpowiedzi oraz szczegółowe rozwiązania umożliwiające efektywne szacowanie prawdopodobieństwa awarii w przypadku nieciągłej pierwszej pochodnej funkcji granicznej. Tego typu funkcja graniczna występuje w analizie procesu tłoczenia blach, analizie przystosowania, stanów granicznych oraz we wszystkich przypadkach, gdy złożoność analizy generuje znaczący błąd numeryczny.

Algorytm metody powierzchni odpowiedzi zawiera określoną strategię doboru zbioru realizacji wektora zmiennych losowych, które wraz z odpowiadającymi im wartościami funkcji granicznej są źródłem informacji o tej funkcji w istotnym obszarze zmienności. Te dane są wykorzystywane do wyboru współczynników aproksymacji funkcji granicznej metodami analizy regresji. Tak uzyskana jawna postać funkcji reprezentującej zachowanie konstrukcji jest następnie wykorzystywana do analizy niezawodności metodami standar-dowymi.

# ROZDZIAŁ 1

## Wstęp

#### 1.1. Cel i zakres pracy

Celem niniejszej pracy jest opracowanie algorytmu analizy niezawodności konstrukcji sprężysto-plastycznych poddanych obciążeniom cyklicznie zmiennym oraz realizacja systemu komputerowego umożliwiającego efektywną analizę rzeczywistych konstrukcji. Tak postawione zadanie wymaga zastosowania w analizie niezawodności nowych technik obliczeniowych. Z szeregu dostępnych rozwiązań wybrano metodę powierzchni odpowiedzi. Algorytm metody powierzchni odpowiedzi składa się z dwóch części. Pierwszą z nich jest bazująca na teorii planowania eksperymentów strategia doboru zbioru realizacji wektora zmiennych losowych, które wraz z odpowiadającymi im wartościami funkcji granicznej są źródłem informacji o tej funkcji w istotnym obszarze zmienności. W drugiej części algorytmu te dane są wykorzystywane do wyboru istotnych współczynników aproksymacji funkcji granicznej metodami analizy regresji liniowej. Ostatecznie, czasochłonna analiza konstrukcji sprężysto-plastycznych jest zastąpiona przez otrzymane równanie regresji, jawną postać funkcji reprezentującej zachowanie konstrukcji. Analizę niezawodności w przypadku jawnej postaci funkcji granicznej można przeprowadzić metodami standardowymi. Metodę powierzchni odpowiedzi można dostosować do indywidualnych cech rozpatrywanego zagadnienia poprzez uwzględnienie w algorytmie wszelkich dostępnych informacji o rozpatrywanym problemie i o postaci funkcji granicznej. Możliwa jest cała gama algorytmów metody powierzchni odpowiedzi, począwszy od rozwiązania ogólnego, które nie zawiera dodatkowych informacji o postaci funkcji granicznej i może być stosowane w wielu szczególnych przypadkach, aż do rozwiązania szczegółowego, które ma zastosowanie tylko do ściśle określonej postaci funkcji granicznej.

Wstępne rozważania niniejszej pracy dotyczą powierzchni odpowiedzi w przypadku ciągłej funkcji granicznej o pojedynczym punkcie projektowym. Jest to milczące zało-

żenie towarzyszące poprawnemu rozwiązaniu zagadnienia klasycznymi obecnie metodami gradientowymi pierwszego i drugiego rzędu. Ich ogromna popularność jest związana z możliwością uzyskania wyniku oszacowania prawdopodobieństwa awarii na podstawie lokalizacji punktu projektowego, którego położenie jest najczęściej określane za pomocą metod programowania nieliniowego. Chociaż jest to najbardziej efektywna grupa metod, to może być stosowana jedynie w przypadku ciągłej pierwszej pochodnej funkcji granicznej.

Rozpatrywana w pracy analiza konstrukcji sprężysto-plastycznych charakteryzuje się nieciągłością pierwszej pochodnej funkcji granicznej. Nieciągłość ta jest wynikiem istotnej wielkości błędu numerycznego spowodowanego dużą złożonością wykonywanych obliczeń. Tego typu problem ma miejsce w analizie procesu tłoczenia blach, gdzie stosowany jest algorytm bezpośredniego całkowania równań ruchu względem czasu, a także w analizie przystosowania oraz w analizie nośności granicznej konstrukcji, gdzie jest wykorzystywana iteracyjna procedura min-max.

Prezentowany algorytm metody powierzchni odpowiedzi w przypadku nieciągłej pierwszej pochodnej funkcji granicznej jest ogólnym rozwiązaniem, którego zastosowanie ilustruje analiza niezawodności procesu tłoczenia blach. Proces tłoczenia blach cechuje stosunkowo duża losowa zmienność spowodowana losowym charakterem parametrów opisujących własności mechaniczne oraz grubość blachy, czy też warunki tarcia. Do najczęstszych defektów należą pęknięcia blachy, których niebezpieczeństwo ocenia się w praktyce na podstawie wykresu granicznej krzywej tłoczenia. Z powodu niepewności oceny możliwości wystąpienia pęknięcia wprowadza się margines bezpieczeństwa. Proponowany w niniejszej pracy algorytm analizy niezawodności procesu tłoczenia blach umożliwia ilościowe określenie prawdopodobieństwa wystąpienia pęknięcia blachy przy znanych rozkładach losowych parametrów charakteryzujących proces tłoczenia. Analiza procesu tłoczenia blach jest przeprowadzana programem STAMPACK.

Szczególne rozwiązanie algorytmu metody powierzchni odpowiedzi dotyczy przypadku analizy niezawodności przystosowania oraz ograniczonej klasy zadań analizy niezawodności nośności granicznej. Szczególność tego algorytmu wynika z uwzględnienia losowej natury jedynie obciążeń. Efektywną analizę spotykanych w praktyce zadań umożliwiają założenia upraszczające opis stochastyczny obciążeń będący następstwem opisu obciążeń przyjętego w modelu mechanicznym. Ponadto, algorytm wykorzystuje własności standardowej przestrzeni gaussowskiej, a także cechy charakterystyczne rozwiązania zadania przystosowania oraz zadania nośności granicznej w oryginalnej przestrzeni zmiennych losowych. Złożoność powyższego zagadnienia jest zilustrowana za pomocą prostego przykładu analizy belki dwuprzęsłowej.

Metoda min-max odgrywa istotną rolę w analizie konstrukcji sprężysto-plastycznych. Dzięki niej istnieje możliwość skutecznego wyznaczania wartości mnożnika obciążenia przystosowania oraz mnożnika obciążenia określającego nośność graniczną szerokiej klasy konstrukcji. Mnożnik obciążenia w metodzie min-max jest rezultatem minimalizacji maksymalnych wartości zredukowanego naprężenia poprzez optymalnie dobrane statycznie dopuszczalne pole naprężeń resztkowych. Analizowanie rzeczywistych konstrukcji wymaga użycia metod numerycznych. Analiza sprężysta jest wykonywana programem metody elementów skończonych FEMLIB. Na bazie rozwiązania sprężystego jest przeprowadzana analiza przystosowania oraz analiza nośności granicznej programem CYCLONE. W niniejszej pracy analizowane są konstrukcje osiowo–symetryczne modelowane trójkątnymi elementami CST.

#### 1.2. Przegląd literatury

Przedmiot rozważań niniejszej pracy obejmuje swoim zakresem kilka dziedzin nauki. Są to: teoria niezawodności; metoda powierzchni odpowiedzi w skład której wchodzą metody analizy regresji liniowej oraz metody planowania eksperymentów; teoria konstrukcji sprężysto–plastycznych, czyli teoria przystosowania oraz teoria nośności granicznej konstrukcji. Każda z wyżej wymienionych dziedzin jest dobrze udokumentowana i można znaleźć wiele publikacji dobrze przedstawiających rozwój każdej z nich z osobna. Znacznie mniej jest prac łącznych, bezpośrednio dotyczących rozważanych zagadnień. Poniżej zostały przedstawione najistotniejsze publikacje z punktu widzenia celu niniejszej pracy.

Analiza przystosowania umożliwia wyznaczenie maksymalnego obszaru zmienności obciążeń zapewniającego bezpieczną pracę konstrukcji. Rozwój tego działu teorii plastyczności ma bogatą historię. Pierwsze twierdzenie o przystosowaniu sformułowane dla statycznie niewyznaczalnych belek o przekroju idealnie dwuteowym podane zostało przez Bleicha [7] w latach trzydziestych. Kilka lat później, w 1938 roku, Melan [76] przedstawił twierdzenia statyczne o przystosowaniu dla ciała trójwymiarowego. Pierwszy wariant twierdzenia kinematycznego przedstawił Neal [83] w 1950 roku. Pełną wersję twierdzenia kinematycznego wraz z dowodem kilka lat później sformułował Koiter [58]. Wtedy też jako pierwszy zauważył, że twierdzenia nośności granicznej są szczególnym przypadkiem twierdzeń o przystosowaniu. W podsumowującej pracy [59] z 1960 roku Koiter przedstawił twierdzenie o nośności granicznej oraz twierdzenie o przystosowaniu w obecnie używanej postaci. Kinematyczne twierdzenie Koitera wraz ze statycznym twierdzeniem Melana są określane mianem twierdzeń klasycznych. Twierdzenia te stanowiły fundament późniejszego rozszerzania teorii: o bardziej złożone modele materiałów, uwzględnienie geometrycznej nieliniowości, nowych rodzajów obciążenia czy też badanie wpływu temperatury. Kolejne istotne osiągnięcie było przedstawione w pracach Sawczuka [98] i Gokhfelda [42], gdzie pokazali metodę całkowania równań Koitera po czasie. To rozwiązanie pozwoliło na zastosowanie twierdzenia kinematycznego w teorii płyt i powłok. Ponadto, w powyższych pracach określono mechanizmy nieprzystosowania, plastyczność naprzemienną oraz zniszczenie przyrostowe. Opis dyskretny konstrukcji wraz z programowaniem matematycznym zostały zastosowane w teorii przystosowania przez Maiera [72, 73, 74] i Čyrasa [16]. Późniejsze uogólnianie teorii przystosowania miało również miejsce w kręgach naukowych IPPT. Prace Königa [61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 104], Sawczuka [10, 98], Kleibera [9, 68], Borkowskiego [8, 9, 10], Siemaszki [101, 104], czy też Pycki [89] znacznie przyczyniły się do rozwoju teorii przystosowania. Alternatywne sformułowanie zadania przystosowania, umożliwiające efektywną analizę konstrukcji przestrzennych,

zostało zaproponowane w pracach Zwolińskiego i Bielawskiego [127] oraz Pycko i Mroza [90]. Przedstawiona w nich metoda wyznaczania mnożnika obciążenia przystosowania oraz nośności granicznej została sprowadzona do iteracyjnej procedury min-max, która umożliwia efektywną analizę konstrukcji. Znane są także inne rozwiązania stosowane w analizie konstrukcji sprężysto-plastycznych, wśród których należy wymienić propozycje Heitzera i Staata [49], Pontera [86] oraz Zarki [120].

Obecnie teoria niezawodności konstrukcji jest dobrze opisaną dziedziną wiedzy, którą dobrze dokumentują znane podręczniki i monografie autorów: Melchersa [78], Thoft-Christensena i Bakera [114], Augusti, Baratta i Casciati [6] czy też Madsena, Krenka i Linda [71]. Wiele ośrodków naukowo-badawczych na świecie zajmuje się rozwojem nowych metod analizy niezawodności. Wśród czołowych badaczy, którzy zajmują się tą tematyką należy wymienić R. Rackwitza, O. Ditlevsena, P. Thoft-Christensena, A. Der Kiureghiana, G. I. Schuëllera czy też R. E. Melchersa. Również w kręgach naukowych IPPT PAN prowadzone są badania dotyczące analizy niezawodności. Prace w tej dziedzinie publikował Doliński [23, 24, 25], a autorami prac dotyczących optymalizacji niezawodnościowej konstrukcji byli Putresza [88] oraz Stocki [56, 112, 111].

Wpływ losowej natury parametrów definiujących konstrukcję na bezpieczeństwo jej eksploatacji jest od dawna przedmiotem rozważań. Już w 1937 roku została opublikowana praca Wierzbickiego [118], w której przedmiotem badań jest bezpieczeństwo konstrukcji poddanej obciążeniu losowemu. Chociaż jest to jedna z pierwszych prac poruszających zagadnienie bezpieczeństwa konstrukcji, to za prekursorską w teorii niezawodności uważa się publikację Freudenthala [38] z 1956 roku. Jednak dopiero w przeciągu ostatnich 30 lat, czyli stosunkowo niedawno, pojawiły się efektywne, a za razem dokładne metody oceny prawdopodobieństwa awarii konstrukcji. Krokiem milowym okazała się praca Hasofera i Linda [46] z 1974 roku, w której zadanie oszacowania wartości wielowymiarowej całki określającej prawdopodobieństwo awarii zostało sprowadzone do zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami, jakim jest procedura poszukiwania punktu projektowego. Punkt ten odpowiada takiej realizacji zmiennych losowych z obszaru awarii, której wartość funkcji gęstości prawdopodobieństwa jest największa. W punkcie projektowym, a nie w punkcie odpowiadającym wartościom średnim jak to zostało zaproponowane w pracy Cornella [14], jest dokonywana linearyzacja funkcji granicznej i na jej podstawie jest szacowane prawdopodobieństwo awarii. Kierunek wytyczony przez Hasofera i Linda był kontynuowany przez Rackwitza i Fiesslera, którzy w 1978 roku w pracy [92] zastosowali transformacje niezależnych zmiennych losowych o dowolnych rozkładach prawdopodobieństwa do standardowych zmiennych normalnych. Ponadto, w tej pracy Rackwitz i Fiessler zaproponowali algorytm poszukiwania punktu projektowego (nazywany od pierwszych liter ich nazwisk algorytmem RF). Następnie Hohenbichler i Rackwitz [51] zastosowali transformację Rosenblatta [97] do transformacji zależnych zmiennych losowych do (oraz z) przestrzeni standardowej. Transformacja Rosenblatta oraz zaproponowana przez Der Kiureghiana i Liu w pracy [21] transformacja Natafa są najczęściej używanymi, podstawowymi narzędziami współczesnej analizy niezawodności. Klasycznymi obecnie metodami analizy niezawodności są bazujące na aproksymacji funkcji granicznej

w punkcie projektowym funkcją pierwszego lub drugiego stopnia, odpowiednio, metoda pierwszego rzędu (FORM) lub drugiego rzędu (SORM). Metoda SORM była rozwiajana przez wielu badaczy, Fiesslera, Neumanna i Rackwitza [35], Breitunga [11], Der Kiure-ghiana [20] czy też Tvedta [116]. Kolejną, najnowszą propozycję metody SORM oraz próbę usystematyzowania dotychczas zaproponowanych metod drugiego rzędu przedsta-wił Adhikari w pracy [2].

Inne podejście do problemu oszacowania wartości wielowymiarowej całki określającej prawdopodobieństwo awarii prezentuje grupa metod symulacyjnych. Najbardziej znaną metodą, z której wywodzą się bardziej zaawansowane rozwiązania jest klasyczna metoda Monte Carlo. Z powodu konieczności wykonania ogromnej liczby symulacji w celu oszacowania zwykle bardzo małych wartości prawdopodobieństwa awarii, metoda ta jest bardzo rzadko stosowana w obliczeniach niezawodnościowych. Efektywniejsze metody symulacyjne zostały opracowane w latach osiemdziesiątych. Bazują one na idei redukcji wariancji poprzez odpowiedni dobór funkcji gestości prawdopodobieństwa, według której generuje się zmienne losowe. Zabieg ten pozwala skoncentrować obszar próbkowania oraz znacznie zmniejszyć liczbę symulacji. Istnieje szereg prac poświęconych tej grupie metod symulacyjnych, między innymi prace Schuëllera i Stixa [99], Hohenbichlera i Rackwitza [50] oraz Dolińskiego [24]. Wśród tej grupy metod należy wyróżnić metody wykorzystujące rozwiązanie metody FORM (SORM). W przypadku gdy powierzchnia graniczna ma kształt zbliżony do hipersfery, do analizy niezawodności najlepiej nadają się metody symulacji kierunkowej. Przegląd metod symulacyjnych można znaleźć w pracach Melchersa [78, 77]. Metody symulacyjne niezależnie od własności funkcji granicznej umożliwiają wyznaczenie prawdopodobieństwa awarii z dowolną dokładnością. Jednak w większości przypadków osiągnięcie zadanej dokładności wiąże się z koniecznością przeprowadzenia zbyt dużej liczby symulacji.

Obiecującym rozwiązaniem umożliwiającym znaczną redukcję liczby symulacji wydaje się być koncepcja tzw. powierzchni odpowiedzi. Pierwotnie koncepcja ta była rozwijana na potrzeby badań doświadczalnych. Wkrótce jednak zostały dostrzeżone możliwości szerszego zastosowania tej idei, co też przełożyło się od początku lat 70-tych na intensywny rozwój metod związanych z tą koncepcją. Metody powierzchni odpowiedzi (MPO) w szczególny sposób wiążą ze sobą planowanie eksperymentu (zbiór uporządkowanych realizacji wektora zmiennych), matematyczne metody analizy danych oraz statystyczną ocenę wyników, umożliwiając efektywny opis zależności występującej w interesującym badacza problemie. Najbardziej znaną pracą dotyczącą MPO jest monografia Myersa [81] z 1971 roku, poprawiona i uzupełniona przez Myersa i Montgomeryego [82] w 2002 roku. Stała się ona podstawowym podręcznikiem w tej dziedzinie. Opis szeregu metod planowania doświadczeń pozwalających uzyskać w optymalny sposób interesującą badacza informację można znaleźć w książkach Zielińskiego [126] oraz Polańskiego [85]. Wiadomości na temat matematycznych metod analizy danych określanych mianem metod analizy regresji można znaleźć w obszernej monografii Drapera i Smitha [27].

Szczególny przypadek zastosowań metody powierzchni odpowiedzi dotyczy analizy niezawodności. Już w 1982 roku Rackwitz w pracy [91] przedstawił kilka idei dotyczą-

cych różnych typów funkcji aproksymujących oraz strategii planowania eksperymentów. Również inni badacze dostrzegli zalety tego podejścia. Bucher i Bourgund [12] zaproponowali adaptacyjną MPO, w której funkcja graniczna jest aproksymowana wielomianem drugiego stopnia bez członów mieszanych. Kolejny krok zrobili Rajashekhar i Ellingwood [93] poprzez zastosowanie do aproksymacji pełnego wielomianu drugiego stopnia. Faravelli [32] już wcześniej proponowała podobne rozwiązanie, które zastosowała do badania wpływu przestrzennej zmienności mechanicznych i geometrycznych własności zbiornika ciśnieniowego. Przykład bardzo ogólnego rozwiązania MPO połączonego z metodą symulacji kierunkowej jest przedstawiony w pracy Waartsa [117]. Szereg różnych koncepcji i specyficznych rozwiązań dokumentuje dynamiczny rozwój metody (zob. [33], [31], [34], [17], [30], [52], [79]). Pomimo tak wielu opracowań nie została opracowana uniwersalna metoda, a więc i oprogramowanie, które łączyłoby szybkość obliczeń z dokładnością uzyskanych wyników. Często sformułowanie rozważanego zagadnienia determinuje przyjęte w analizie niezawodności rozwiązania.

Autorami jednej z pierwszych prac koncentrujących uwagę na aspektach probabilistycznych w analizie przystosowania oraz analizie nośności granicznej konstrukcji byli włoscy badacze, Augusti i Barrata [4, 5]. Następna praca, która powinna być odnotowana jest autorstwa Corotisa i Nafdaya [15]. Praca obejmuje przypadek analizy niezawodności przystosowania oraz nośności granicznej płaskich konstrukcji ramowych. Prawdopodobieństwo awarii w tej pracy zostało zdefiniowane w biegunowym układzie współrzędnych wykorzystując pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego. W Polsce analizę niezawodności przystosowania oraz nośności granicznej konstrukcji prętowych w szerokim zakresie rozpatrywali Śniady, Żukowski i Sieniawska [107, 108, 109, 105, 106]. Współcześnie, analizą niezawodności konstrukcji sprężysto-plastycznych między innymi zajmują się Heitzer i Staat [47]. W swojej pracy [48] zaprezentowali przykład analizy konstrukcji przestrzennej metodą FORM. W Polsce pierwsze prace dotyczące analizy niezawodności przestrzennych konstrukcji sprężysto-plastycznych przy użyciu metody powierzchni odpowiedzi zostały zaprezentowane przez Siemaszkę i Knabla na międzynarodowych konferencjach w Rzeszowie (1999) oraz w Zakopanem (2000). Idea prezentowanej metody oraz przykład analizy konstrukcji osiowo-symetrycznych zostały zawarte w późniejszej pracy Siemaszki, Bielawskiego i Knabla [102]. Przeprowadzone przykłady numeryczne w pracach [15, 48, 102] nie obejmowały przypadku obciążeń naprzemiennych. Uogólnienie rozwiązania zadania analizy niezawodności konstrukcji sprężysto-plastycznych z uwzględnieniem możliwości wystąpienia obciążeń naprzemiennych jest celem przygotowywanej pracy Dolińskiego, Knabla i Siemaszki [26].

Wymagania stawiane obecnie konstrukcjom, a w szczególności nacisk kładziony na bezpieczeństwo, ma odzwierciedlenie we współczesnych przepisach projektowych. Analiza przystosowania oraz nośności granicznej konstrukcji będąca podstawą do budowy normy ASME VIII i BS5500 projektowania zbiorników ciśnieniowych pozwala wykorzystać rezerwy nośności tkwiące w materiale. Jednak konsekwencją tak zaprojektowanej konstrukcji jest jej większa wrażliwość na losowe odstępstwa od zakładanych deterministycznie zmiennych, co sprawia, że analiza niezawodności staje się koniecznością.

# ROZDZIAŁ 2

## Analiza konstrukcji sprężysto-plastycznych

W tym rozdziale przedstawiono zarys teorii przystosowania oraz teorii nośności granicznej konstrukcji w zakresie ograniczonym do zastosowań niniejszej pracy. Rozdział zawiera podstawowe zależności oraz elementarne pojęcia określające stopień ogólności zastosowanej metody obliczeniowej ze szczególnym uwzględnieniem modelu obciążeń.

Prezentowana metoda wyznaczania mnożnika przystosowania oraz mnożnika nośności granicznej bazuje na odmiennym od klasycznego sformułowaniu problemu, a mianowicie na metodzie min–max. To podejście umożliwia wyznaczenie mnożnika przystosowania oraz mnożnika nośności granicznej konstrukcji przestrzennych przy nieliniowym warunku plastyczności.

#### 2.1. Model materiału

W pracy rozpatrywany jest izotropowy sprężysto–idealnie plastyczny model materiału, w którym część sprężystą odkształcenia całkowitego  $\varepsilon_{ij}^e$  opisuje prawo Hooke'a

$$\varepsilon_{ij}^e = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \,, \tag{2.1}$$

gdzie  $E_{ijkl}$  oznacza symetryczny (względem wskaźników i, j oraz k, l, a także względem ij, kl, gdzie i, j, k, l = 1, 2, 3) tensor czwartego rzędu składający się z modułów sprężystych, a  $\sigma_{ij}$  jest tensorem drugiego rzędu składowych stanu naprężenia. Odkształcenia wywołane zmianami temperatury  $\varepsilon_{ij}^T$  opisuje liniowa zależność

$$\varepsilon_{ij}^T = M_{ij}T,\tag{2.2}$$

w której T jest temperaturą ciała a  $M_{ij}$  jest tensorem współczynników rozszerzalności cieplnej. Temperatura w rozpatrywanym modelu z założenia nie wpływa na zmianę

własności stałych materiałowych. Występowanie pola odkształceń termicznych zmienia jedynie pole naprężeń.

Przyjęcie sprężysto-idealnie plastycznego modelu materiału implikuje istnienie następującej nierówności

$$F(\sigma_{ij},k) \leqslant 0 \tag{2.3}$$

gdzie  $F(\cdot)$  oznacza funkcję skalarną a k oznacza moduł plastyczny. Za pomocą funkcji (2.3) można określić sprężysty obszar pracy konstrukcji  $F(\sigma_{ij}, k) < 0$  oraz powierzchnię plastyczności

$$F(\sigma_{ij},k) = 0. \tag{2.4}$$

W przypadku jednorodnych funkcji stanu naprężenia, wyrażenie (2.3) jest często przedstawiane w następującej postaci

$$f(\sigma_{ij}) - k \leqslant 0, \qquad (2.5)$$

gdzie  $f(\sigma_{ij})$  oznacza funkcję plastyczności. W prezentowanym modelu  $f(\sigma_{ij})$  jest funkcją jednorodną stopnia pierwszego, czyli  $f(\alpha \sigma_{ij}) = |\alpha| f(\sigma_{ij})$ . W niniejszej pracy rozważano konstrukcje stalowe, których własności plastyczne dobrze opisuje warunek plastyczności Hubera–Misesa. Ogólna postać tego warunku jest następująca

$$2\sigma_{(i)}^2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = 2\sigma_0^2, \quad (2.6)$$

gdzie  $\sigma_0$  oznacza naprężenie uplastyczniające w przypadku jednoosiowego rozciągania, które wyznacza wartość modułu plastycznego  $k = \sigma_0/\sqrt{3}$ , natomiast  $\sigma_{(i)}(\sigma_{ij})$  jest intensywnością naprężenia. Stąd, funkcja plastyczności jest określona następująco

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{(i)}(\sigma_{ij}). \qquad (2.7)$$

Proces plastycznego płynięcia modelu określa stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}},\tag{2.8}$$

gdzie  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  jest tensorem prędkości odk<br/>ształceń plastycznych, a mnożnik  $\lambda$  określa moc dysypacji energii w trakcie procesu plastycznego płynięcia (obciążanie:  $\lambda > 0, F = 0, F = 0$ ). Natomiast odciążanie ( $\lambda = 0$ ) może przebiegać w zakresie sprężystym (F < 0) bądź plastycznym (F = 0, F < 0). Tensor  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  jest ortogonalny do powierzchni plastyczności  $F(\sigma_{ij}, k) = 0$ .

Przyjęty model materiału spełnia postulat "stateczności" Druckera, zob. [28]

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\dot{\varepsilon}_{ij}^p \ge 0, \tag{2.9}$$

gdzie stany naprężenia  $\sigma_{ij}$  i  $\sigma_{ij}^*$  są określone odpowiednio przez  $F(\sigma_{ij}) = 0$  oraz  $F(\sigma_{ij}^*) \leq 0$ . Postulat ten oznacza, że powierzchnia plastyczności nie jest wklęsła.

Przy założeniu małych przemieszczeń całkowite odkształcenie  $\varepsilon_{ij}$  można rozłożyć na część sprężystą  $\varepsilon_{ij}^e$ , plastyczną  $\varepsilon_{ij}^p$  oraz termiczną  $\varepsilon_{ij}^T$ 

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}^p \,. \tag{2.10}$$

#### 2.2. Model obciążeń

W pracy jest brane pod uwagę obciążenie konstrukcji w całej jej objętości V oraz na części brzegu  $S_p$ . Konstrukcja jest podparta na brzegu  $S_u$ . Cały brzeg S jest sumą  $S = S_p \cup S_u$ , przy czym część  $S_u$  jest rozłączna z  $S_p$ .

Niezależnie zmieniające się obciążenie siłami masowymi  $f(\boldsymbol{x},t)$  określonymi w V, siłami zewnętrznymi  $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},t)$  określonymi na  $S_p$  oraz temperaturą  $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)$  w V, może być zdefiniowane za pomocą skończonej liczby  $s = 1, \ldots, n_s$  parametrów obciążenia  $\mu_s(t)$  następująco, zob. [60]

$$f_i = \sum_{s=1}^{n_s} \mu_s(t) f_i^s(\boldsymbol{x}), \qquad p_i = \sum_{s=1}^{n_s} \mu_s(t) p_i^s(\boldsymbol{x}), \qquad T = \sum_{s=1}^{n_s} \mu_s(t) T^s(\boldsymbol{x}), \tag{2.11}$$

gdzie

 $\mu_s(t)$  jest mnożnikiem *s*-tego układu obciążenia opisującym historię zmian obciążenia w czasie,

 $f_i^s(\pmb{x}), p_i^s(\pmb{x}) ~$ są i-tymi składowymi odpowiednich niezależnych od czasu obciążeń s-tego niezależnego układu obciążeń

$$T^s(\pmb{x})$$
niezależną od czasu temperaturą odpowiadając  
ą $s$ –temu niezależnemu układowi obciążeń.

Wielkości (2.11) są formami liniowymi mnożników obciążenia  $\mu_s(t)$ . Sprężyste części tensora naprężenia również są liniowymi formami  $\mu_s(t)$ , co jest ważną cechą powyższego opisu obciążeń. Kolejnym powodem takiego modelowania obciążeń jest rozdzielenie zmiennych, które jest wykonywane w celu wyeliminowania czasu z modelu obciążeń. To uproszczenie wynika w większości problemów praktycznych z faktu braku znajomości przyszłej historii obciążenia oraz projektowaniu na podstawie dostępnych danych, czyli zwykle jedynie danych o ekstremalnych wartościach obciążenia. Niezależne od czasu granice zmian mnożników obciążenia można określić następująco

$$\mu_s^- \leqslant \mu_s(t) \leqslant \mu_s^+ \quad s = 1 \dots n_s \,, \tag{2.12}$$

gdzie  $\mu_s^-$  odpowiada dolnej a  $\mu_s^+$  górnej granicy zmian *s*-tego parametru  $\mu_s(t)$ . Niezależnie zmieniające się układy obciążeń (2.11) mogą więc realizować dowolną ścieżkę obciążenia w obszarze intensywności obciążenia  $\Omega$ , zdefiniowanym zależnością (2.12).

Wprowadzając mnożnik intensywności obciążenia  $\xi > 0$  można proporcjonalnie zwiększyć obszar intensywności obciążenia  $\xi \Omega = \Omega_{\xi}$  według następującej formuły

$$\xi\mu_s^- \leqslant \mu_s(t) \leqslant \xi\mu_s^+ \quad s = 1\dots n_s \,, \tag{2.13}$$

przy czym  $\xi \mu(t) \in \Omega_{\xi}$  (Rysunek 2.1). Obszar  $\Omega_1$  jest określany jako obszar porównawczy. Wielkość obszaru  $\Omega_{\xi}$  determinuje rodzaj pracy konstrukcji i pozwala wyróżnić następujące przypadki:

Zachowanie sprężyste. Obciążenie zmienne, ograniczone obszarem  $\Omega_{\xi}$  ( $\xi \leq \xi_e$ ), nie powoduje przekroczenia granicy plastyczności w jakimkolwiek miejscu konstrukcji.



RYSUNEK 2.1. Przykład obszaru zmienności obciążeń w przestrzeni dwuwymiarowej.

**Przystosowanie się**. Obciążenie zmienne, ograniczone obszarem  $\Omega_{\xi}$  ( $\xi_e < \xi \leq \eta$ ), powoduje wystąpienie przyrostów odkształceń plastycznych, które jednakże po pewnym czasie stopniowo zanikają. Konstrukcja osiąga stan przystosowania i dalej pracuje już tylko sprężyście. Odkształcenia plastyczne generują pole naprężeń resztkowych, które z kolei istotnie wpływa na aktualny rozkład naprężeń w konstrukcji. Maksymalny mnożnik  $\xi$ , dla którego możliwe jest przystosowanie, określa się mnożnikiem przystosowania i oznacza przez  $\eta$ .

Nieprzystosowanie się. Obszar zmienności obciążeń  $\Omega_{\xi}$  większy od obszaru przystosowania ( $\eta < \xi \leq \xi_l$ ) może spowodować nieograniczoną w czasie dysypację energii. Nie znikające przyrosty odkształceń plastycznych mogą doprowadzić do zniszczenia konstrukcji. Wyróżnia się dwa niezależne warianty takiej pracy konstrukcji, które w pewnych przypadkach mogą występować łącznie:

- zniszczenie przyrostowe akumulacja nie zanikających przyrostów odkształceń plastycznych tego samego znaku prowadzi do znacznych deformacji, a w końcu do lokalnego zniszczenia konstrukcji;
- plastyczność naprzemienna generuje zniszczenie niskocyklowe wskutek zmęczenia materiału; jest ono spowodowane nie zanikającymi przyrostami odkształceń plastycznych naprzemiennych znaków.

Natychmiastowe zniszczenie. Obszar zmienności obciążeń  $\Omega_{\xi}$  przekracza pewną wielkość graniczną  $\Omega_{\xi_l}$  ( $\xi \ge \xi_l$ ), dla której już podczas pierwszego cyklu nastąpi zniszczenie konstrukcji. Mnożnik  $\xi_l$  określa nośność graniczą konstrukcji. Daleko idącym uproszczeniem opisu obciążeń (przy idealnie sztywno–plastycznym modelu materiału), które umożliwia analizę graniczną konstrukcji, jest założenie jednorazowego, proporcjonalnego wzrostu wszystkich sił zewnętrznych. Projektowanie jednak tylko za pomocą metod analizy granicznej, w przypadku obciążeń zmiennych, jest niebezpieczne z uwagi na możliwość wcześniejszego wystąpienia zjawiska nieprzystosowania. Analiza graniczna konstrukcji poddanych obciążeniom zmiennym dobrze określa zapas bezpieczeństwa na wypadek wyjątkowego pojawienia się obciążeń ekstremalnych, których wartości wykraczają poza projektowany zakres pracy konstrukcji.

Odrębnego traktowania wymagają następujące przypadki:

- występowania obciążenia o stałych składowych parametrów  $\mu = const.$ ; tylko zmienna część obciążenia powinna być powiększana przez mnożnik;
- występowania obszaru zmienności obciążenia nie obejmującego początku układu współrzędnych; powiększanie obszaru zmienności powinno dotyczyć jedynie większej granicy mnożnika obciążenia.

W rozpatrywanym problemie pominięto wpływ efektów dynamicznych na zachowanie się konstrukcji. Obciążenia dynamiczne są traktowane jako quasistatyczne.

#### 2.3. Związki opisujące zachowanie się konstrukcji

Przyjęto założenie małych odkształceń, co pozwala pominąć wpływ zmian geometrii w równaniach równowagi oraz w związkach geometrycznych. Równania równowagi wewnętrznej z naprężeniowymi warunkami brzegowymi

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{w objętości } V, \sigma_{ij} n_j = p_i \quad \text{na brzegu } S_t,$$

$$(2.14)$$

oraz związki geometryczne i przemieszczeniowe warunki brzegowe

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{w objętości } V,$$

$$u_i = 0 \qquad \text{na brzegu } S_u,$$
(2.15)

tworzą zatem zależności liniowe. Powyższe równania, wraz z równaniami opisującymi model materiału, stanowią kompletne sformułowanie zagadnienia.

Dowolne pole naprężeń spełniające równania równowagi (2.14) (nazywane *statycz*nie dopuszczalnym polem naprężeń) razem z dowolnym polem odkształceń określonym związkami (2.15) (nazywanym kinematycznie dopuszczalnym polem odkształceń) spełniają zasadę prac wirtualnych

$$\int_{V} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_u} p_i u_i dS + \int_{V} F_i u_i dV$$
(2.16)

niezależnie od rodzaju związków fizycznych wiążących te pola. W szczególności, zasada ta obowiązuje gdy pola naprężeń i odkształceń są związane zależnością (2.1).

W opisie konstrukcji sprężysto-plastycznych wygodne jest zastosowanie następującej dekompozycji stanu naprężenia (por. [59])

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E + \varrho_{ij}, \tag{2.17}$$

gdzie  $\sigma_{ij}^E$  można utożsamiać ze stanem naprężenia w konstrukcji idealnie sprężystej poddanej działaniu tego samego obciążenia a  $\rho_{ij}$  jest polem naprężeń sprężystych powstałym w konstrukcji nieobciążonej na skutek deformacji plastycznej, nazywanym polem naprężeń resztkowych. Na uwagę zasługuje fakt, że dekompozycja (2.17) umożliwia wyznaczenie pola naprężeń w konstrukcji sprężysto-plastycznej przez złożenie (zgodnie z zasadą superpozycji) pól naprężeń dwóch konstrukcji pozostających w stanie sprężystym. Przy czym należy pamiętać o tym, że dzięki polu naprężeń resztkowych konstrukcja jest w zakresie sprężystym, a bez pola naprężeń resztkowych byłaby w stanie sprężysto-plastycznym.

Taki sam podział dotyczy pola odkształceń i przemieszczeń

gdzie  $\varepsilon_{ij}^E$  jest sumą pól odkształceń termicznych oraz odkształceń konstrukcji idealnie sprężystej związaną z polem przemieszczeń  $u_i^E$ , a  $\varepsilon_{ij}^R$  jest kinematycznie zgodnym polem odkszałceń resztkowych związanym z polem przemieszczeń resztkowych  $u_i^R$ .

Liniowość związków (2.14, 2.15) oraz przyjętej definicji obciążeń (2.11), w przypadku konstrukcji idealnie sprężystej, pozwala na przedstawienie stanu naprężenia i przemieszczenia za pomocą następujących sum

$$\sigma_{ij}^{E}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{s=1}^{n_{s}} \mu_{s}(t) \sigma_{ij}^{Es}(\boldsymbol{x}),$$

$$u_{i}^{E}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{s=1}^{n_{s}} \mu_{s}(t) u_{i}^{Es}(\boldsymbol{x}),$$
(2.19)

gdzie  $\sigma_{ij}^{Es}$  jest polem naprężeń a  $u_i^{Es}(\boldsymbol{x})$  jest polem przemieszczeń *s*-tego układu obciążeń. W skład pola  $\sigma_{ij}^{Es}$  wchodzi pole naprężeń generowane przez pole odkształceń termicznych. W każdym punkcie konstrukcji, stosownie do wyróżnionych już obszarów zmienności obciążeń, można określić odpowiadające im obszary zmienności naprężeń, Rysunek 2.2. Obszar  $\Sigma_{\xi}$  jest więc związany z obszarem  $\Omega_{\xi}$ . W przypadku gdy  $\xi = 1$  to  $\Sigma_1$  wyznacza obszar porównawczy i analogicznie  $\Sigma_{\xi_e}$  ( $\xi = \xi_e$ ) wyznacza obszar sprężysty,  $\Sigma_{\eta}$  ( $\xi = \eta$ ) obszar przystosowania, a  $\Sigma_{\xi_l}$  ( $\xi = \xi_l$ ) obszar nośności granicznej.

Pozostaje jedynie wyznaczenie wartości mnożnika intensywności obciążenia zapewniającej przystosowanie się bądź określającej nośność graniczną konstrukcji.

#### 2.4. Twierdzenia klasyczne teorii przystosowania

Zastosowana w pracy metoda wyznaczania mnożnika intensywności obciążenia bazuje na tzw. statycznym twierdzeniu Melana [76]. Twierdzenie to stanowi podstawę do dolnego oszacowania mnożnika przystosowania  $\eta$ .



Rysunek 2.2. Obszar zmienności naprężeń.

Konstrukcja przystosuje się do dowolnej ścieżki obciążenia zawartej w przestrzeni obciążeń określonej mnożnikiem  $\eta > 1$ , jeśli istnieje takie niezależne od czasu statycznie dopuszczalne pole naprężeń resztkowych

$$\varrho_{ij,j}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{w objętości } V, 
\rho_{ij}(\boldsymbol{x})n_j = 0 \quad \text{na brzegu } S_t,$$
(2.20)

że spełniony jest warunek

$$f\left(\eta\sigma_{ij}^{E}(\boldsymbol{x},t) + \varrho_{ij}(\boldsymbol{x})\right) \leqslant k.$$
(2.21)

Powyższy warunek można również przedstawić w następującej postaci, por. [67]

$$\max_{\boldsymbol{x}\in V} \max_{\mu_s\in\Omega} \frac{f\left(\sum_{s=1}^{n_s} \mu_s \sigma_{ij}^{Es}(\boldsymbol{x}) + \varrho_{ij}(\boldsymbol{x})\right)}{k} \leqslant 1,$$
(2.22)

przy czym  $\rho_{ij}$  w tym wzorze oznacza pole naprężeń resztkowych na końcu procesu przystosowania, gdy konstrukcja pracuje już tylko w zakresie sprężystym.

Oszacowanie od góry mnożnika  $\eta$ , które również zabezpiecza konstrukcję przed wystąpieniem zniszczenia przyrostowego bądź plastyczności naprzemiennej, umożliwia tzw. kinematyczne twierdzenie Koitera [58].

Konstrukcja nie przystosuje się do dowolnej ścieżki obciążenia zawartej w przestrzeni obciążeń określonej mnożnikiem  $\eta > 1$ , jeśli istnieje taki cykl odkształceń plastycznych  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}(\boldsymbol{x},t)$ , który tworzy w danym przedziale czasu  $< t_1, t_2 >$  kinematycznie dopuszczalny przyrost odkształcenia

$$\Delta \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\varepsilon}_{ij}^p(\boldsymbol{x}, t) dt = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j}^R + \Delta u_{j,i}^R) \quad \text{w objętości } V,$$

$$\Delta u_i^R = 0 \qquad \text{na brzegu } S_u,$$
(2.23)

taki, że dysypacja energii w tym cyklu jest mniejsza niż praca naprężeń  $\sigma_{ij}^E(\boldsymbol{x},t)$  na tych odkształceniach, czyli

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^E \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV dt > \int_{t_1}^{t_2} \int_V D(\dot{\varepsilon}_{ij}^p) dV dt.$$
(2.24)

 $D(\dot{\varepsilon}_{ij}^p)$  oznacza prędkość dysypacji plastycznej, która jest jednoznaczną funkcją pola  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  oraz stowarzyszonego z nim pola naprężeń.

Bezpieczne sformułowanie powyższego twierdzenia wymaga odwrócenia znaku nierówności w warunku (2.24). Wyrażenie pozwalające na oszacowanie bezpiecznej wielkości obszaru obciążeń wygodnie jest przedstawić stosując zasadę prac wirtualnych (2.16) do modyfikacji lewej strony nierówności

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij}^E \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{n_s} \mu_s(t) \left[ \int_V f_i^s \dot{u}_i^R dV + \int_{S_t} p_i^s \dot{u}_i^R dS_t + \int_V M_{ij} T^s \dot{\varrho}_{ij} dV \right] dt \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \int_V D(\dot{\varepsilon}_{ij}^p) dt,$$

$$(2.25)$$

gdzie  $\dot{\varrho}_{ij}$  jest polem prędkości naprężeń resztkowych stowarzyszonym z polem prędkości odkształceń plastycznych  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  generowanych w przedziale czasu  $\langle t_1, t_2 \rangle$ . Innymi słowy, konstrukcja przystosuje się, jeśli praca obciążeń działających na konstrukcję będzie nie większa niż ilość pracy plastycznej (możliwej do zmagazynowania) powstałej na wszystkich kinematycznie dopuszczalnych polach prędkości odkształceń plastycznych.

Przy pomocy nierówności (2.24) można również analizować nieprzystosowanie się konstrukcji. Występująca wówczas nieograniczona dysypacja energii może prowadzić do wystąpienia zjawiska zniszczenia przyrostowego lub plastyczności naprzemiennej, a także wystąpienia obu tych zjawisk łącznie. Jednak z uwagi na stosowaną metodę analizy, która bazuje na podejściu statycznym, powyższe zagadnienia nie zostały przedstawione w pracy.

Twierdzenia o nośności granicznej, co zauważył podsumowując ówczesny stan wiedzy Koiter [59], są szczególnym przypadkiem powyższych twierdzeń o przystosowaniu. Przestrzeń mnożników obciążeń jest w przypadku nośności granicznej zredukowana do jednego wymiaru.

#### 2.5. Metoda min-max

Tradycyjne metody analizy przystosowania konstrukcji bazują na przyrostowej analizie sprężysto-plastycznej, zob. [9, 68]. Praktyczne zastosowanie tego rodzaju analizy jest jednak bardzo czasochłonne.

Większość metod wyznaczania mnożnika przystosowania oraz mnożnika określającego nośność graniczną bazuje na procedurze programowania matematycznego z ograniczeniami, zob. [72, 73, 74], w której stosownie do przyjętej postaci warunku plastyczności, zastosowanie ma programowanie liniowe lub nieliniowe. Programowanie liniowe wykorzystuje liniową aproksymację warunku plastyczności. Dokładność aproksymacji wpływa na ilość ograniczeń występujących w procedurze programowania matematycznego. Ogranicza to efektywność tego podejścia, zwłaszcza gdy zwiększa się liczba składowych opisujących stan naprężenia konstrukcji. Programowanie nieliniowe natomiast charakteryzuje duża złożoność procedur numerycznych i jeszcze większe problemy w praktycznym zastosowaniu inżynierskim.

Alternatywne sformułowanie zadania przystosowania, umożliwiające analizę konstrukcji przestrzennych, zostało zaproponowane w pracach J. Zwolińskiego i G. Bielawskiego [127] oraz S. Pycko i Z. Mroza [90]. Przedstawiona w nich metoda wyznaczania mnożnika przystosowania oraz nośności granicznej została sprowadzona do iteracyjnej procedury min-max, która umożliwia efektywną analizę konstrukcji w złożonym stanie naprężenia. Idea metody bazuje na podejściu statycznym wykorzystującym nierówność (2.21)

$$f\left(\sigma_{ij}^{E}(\boldsymbol{x},t) + \hat{\varrho}_{ij}(\boldsymbol{x})\right) \leqslant \lambda k, \qquad (2.26)$$

w którym wprowadzono mnożnik skalarny  $\lambda$  zmniejszający wartość modułu plastycznego (zamiast mnożnika  $\xi$  proporcjonalnie powiększającego obszar obciążenia (2.13)), a  $\hat{\varrho}_{ij}$ jest statycznie dopuszczalnym polem naprężeń resztkowych odpowiadającym mnożnikowi  $\lambda$ . Tym samym przyjęto  $\xi = 1$  co oznacza, że obciążenie (2.11) może zmieniać się dowolnie jedynie wewnątrz ustalonych granic a mnożnik  $\lambda$  określa minimalną wartość modułu plastyczności, przy którym wystąpi jeszcze zjawisko przystosowania. Związek (2.26) jest równoważny nierówności (2.21), ponieważ pole naprężeń resztkowych gwarantujących przystosowanie można przedstawić następująco

$$\varrho_{ij} = \lambda^{-1} \hat{\varrho}_{ij}, \qquad (2.27)$$

a wtedy nierówność (2.26) po prostych przekształceniach wykorzystujących własność jednorodności rzędu pierwszego funkcji plastyczności przybiera postać

$$f\left(\lambda^{-1}\sigma_{ij}^{E}(\boldsymbol{x},t) + \varrho_{ij}(\boldsymbol{x})\right) \leqslant k.$$
(2.28)

Alternatywny mnożnik przystosowania  $\lambda$  (zob. [90]) wyznacza wielkość obszaru zmienności obciążeń  $\lambda^{-1}f_i$ ,  $\lambda^{-1}p_i$ ,  $\lambda^{-1}T$  gwarantującą bezpieczną pracę konstrukcji. Mnożnik  $\lambda = \eta^{-1}$  w tej metodzie jest rezultatem rozwiązania zadania min–max

$$\eta^{-1} = \min_{\varrho_{ij}} \max_{\boldsymbol{x},t} \frac{f\left(\sigma_{ij}^{E}(\boldsymbol{x},t) + \varrho_{ij}(\boldsymbol{x})\right)}{k}, \qquad (2.29)$$

które minimalizuje maksymalne wartości zredukowanego naprężenia  $f(\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t))$  poprzez optymalnie dobrane statycznie dopuszczalne pole naprężeń resztkowych  $\varrho_{ij}(\boldsymbol{x})$ . Pole  $\varrho_{ij}(\boldsymbol{x})$  jest generowane przez odpowiednio dobrane pole odkształceń plastycznych

$$\varrho_{ij}(\boldsymbol{x}) = \int_{V} G_{ij}^{kl}(\boldsymbol{x},\zeta) \varepsilon_{ij}^{p}(\zeta) dv, \qquad (2.30)$$

gdzie  $G_{ij}^{kl}(\boldsymbol{x},\zeta)$  jest funkcją wpływu Greena.

Pole  $\sigma_{ij}^{E}(\boldsymbol{x},t)$  w analizie przystosowania jest obwiednią naprężeń sprężystych, które odpowiada obciążeniu określonemu granicami zmienności, zob. (2.13). W analizie nośności granicznej  $\sigma_{ij}^{E}(\boldsymbol{x},t)$  jest polem naprężeń sprężystych, które odpowiada przyłożonemu obciążeniu o ustalonych proporcjach.

#### 2.5.1. Metoda min-max w programie CYCLONE

Praktyczne zastosowanie powyższej metody do analizy rzeczywistych konstrukcji wymaga użycia metod numerycznych. Najbardziej rozpowszechnioną metodą analizy konstrukcji, której wszechstronność i efektywność umożliwia również modelowanie złożonych problemów mechaniki jest Metoda Elementów Skończonych (MES). Na bazie rozwiązania sprężystego MES oraz metody min-max został opracowany program CYCLONE, zob. [103]. Program ten służy do analizy zagadnień płaskich oraz osiowo-symetrycznych. Konstrukcje modelowane są za pomocą trójkątnego elementu skończonego CST<sup>1</sup>, zob. [29]. Iteracyjny algorytm poszukiwania optymalnego pola naprężeń resztkowych jest dostosowany do warunku plastyczności Hubera-Misesa, zob. (2.6).

Związek między naprężeniami i odkształceniami resztkowymi w m-tym elemencie skończonym jest analogiczny do związku opisującego zagadnienie liniowo-sprężyste, zob. Rozdział 2.3. Natomiast zależność między wektorem naprężeń resztkowych  $\boldsymbol{\varrho}$  a wektorem odkształceń plastycznych  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  we wszystkich M elementach jest następująca

$$\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}^p \,, \tag{2.31}$$

gdzie A jest macierzą wpływu, która jest wyznaczana z warunku minimum pełnej energii potencjalnej konstrukcji nieobciążonej, zob. [74]. Macierz ta odpowiada funkcji Greena dla konstrukcji przed podziałem na elementy skończone, zob. (2.30).

Realizacja metody min–max w programie CYCLONE bazuje na rozwiązaniu sprężystym ( $\sigma_{ij}^E$ ,  $\varepsilon_{ij}^E$ ), przy założeniu stałego rozkładu odkształceń oraz naprężeń w elemencie. Konsekwencją tego założenia jest stałość naprężeń zredukowanych w elemencie. W rozpatrywanym przypadku wartość naprężeń zredukowanych w *m*–tym elemencie jest funkcją stanu naprężenia

$$(\sigma_{zred})_m = \sigma_{zred}(\sigma_{ij})_m = \sigma_{zred}((\sigma_{ij}^E)_m + (\varrho_{ij})_m), \qquad (2.32)$$

którą determinuje przyjęty warunek Hubera–Misesa. W metodzie min–max stosowana jest funkcja naprężeń zredukowanych w elemencie

$$f_m = (\sigma_{zred}^2)_m, \qquad m = 1, 2, \dots, M,$$
 (2.33)

której minimalizacja dla maksymalnych naprężeń zredukowanych (2.29) jest dokonywana w procesie optymalizacji. Opis kluczowych idei procedury optymalizacyjnej został zamieszczony poniżej.

Przyjmując założenie, że na kroku t-1 (parametr t przyjmuje tutaj wartości ze zbioru liczb naturalnych) znane jest pole odkształceń plastycznych ( $\varepsilon^{p}$ )<sup>t-1</sup> można wyznaczyć naprężenia resztkowe i całkowite

$$(\boldsymbol{\varrho})^{t-1} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}^p)^{t-1}, \qquad (2.34)$$

$$\boldsymbol{\sigma})^{t-1} = \boldsymbol{\sigma}^E + (\boldsymbol{\varrho})^{t-1}, \qquad (2.35)$$

(

<sup>&</sup>lt;sup>1)</sup> Element ten w przypadku zadań PSN i PSO charakteryzuje stały rozkład odkształceń i naprężeń. W przypadku zagadnień osiowo–symetrycznych analizowanych programem CYCLONE, wartość odkształcenia oraz naprężenia jest uśredniana w elemencie. Nazwa CST pochodzi od pierwszych liter nazwy ang. *Constant Strain Triangle.* 

oraz wartość funkcji naprężeń zredukowanych (2.33) we wszystkich M elementach. Wartości maksymalne funkcji (2.33) mogą być zredukowane przez dodanie na kroku t przyrostu  $(\Delta \boldsymbol{\varrho})^t$ , który jest rezultatem przyrostu odkształceń plastycznych  $(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)^t$ , wzór (2.31). Określenie wartości składowych przyrostu

$$(\triangle \varepsilon^p)^t = \xi^t (\overline{\varepsilon}^p)^t \,, \tag{2.36}$$

czyli wyznaczenie w przestrzeni kinematycznie dopuszczalnych odkształceń plastycznych kierunku poszukiwań  $(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^t$ , oraz określenie wielkości perturbacji  $\xi^t$  jest kluczowe dla efektywności algorytmu min–max. W ostatecznym rozwiązaniu, stosownie do stowarzyszonego z przyjętym warunkiem plastyczności prawa płynięcia (2.8), składowe kierunku wektora optymalizacji  $(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^t$  są proporcjonalne do składowych dewiatora naprężeń, a wartość  $\xi^t$  jest określona w następujący sposób.

Wstępnie zakłada się, że wartość  $\xi^t$  jest znana. Tym samym znany jest również kierunek optymalizacji naprężeń resztkowych  $(\overline{\boldsymbol{\varrho}})^t$ , ponieważ  $(\overline{\boldsymbol{\varrho}})^t = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}^p)^t$ . Zatem wartości składowych wektorów  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  oraz  $\boldsymbol{\sigma}$  na kroku t mogą być przedstawione następująco

$$(\boldsymbol{\varepsilon}^p)^t = (\boldsymbol{\varepsilon}^p)^{t-1} + (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)^t, \qquad (2.37)$$

$$(\boldsymbol{\sigma})^t = (\boldsymbol{\sigma})^{t-1} + (\Delta \boldsymbol{\sigma})^t, \qquad (2.38)$$

przy czym

$$(\Delta \boldsymbol{\sigma})^t = (\Delta \boldsymbol{\varrho})^t = \xi^t (\overline{\boldsymbol{\varrho}})^t \,. \tag{2.39}$$

Stąd, wektor naprężeń całkowitych

$$(\boldsymbol{\sigma})^{t} = (\boldsymbol{\sigma})^{t-1} + (\Delta \boldsymbol{\sigma})^{t} = (\boldsymbol{\sigma})^{t-1} + \xi^{t} (\overline{\boldsymbol{\varrho}})^{t} = (\boldsymbol{\sigma})^{t-1} + \xi^{t} \boldsymbol{A} (\boldsymbol{\varepsilon}^{p})^{t}, \qquad (2.40)$$



RYSUNEK 2.3. Graficzna ilustracja zadania optymalizacji w metodzie min-max. Parabole  $f_k$ ,  $f_m$  reprezentują wytężenie, wzór (2.41) odpowiednio w elementach k, m.

po podstawieniu do warunku (2.33), generuje następującą funkcję kwadratową

$$f_m(\xi^t) = a_m(\xi^t)^2 + b_m\xi^t + c_m , \qquad (2.41)$$

której współczynniki  $a_m, b_m, c_m$  są znane, ponadto  $a_m > 0$ . W zbiorze funkcji  $f_m(\xi^t)$ ,  $m = 1, 2, \ldots, M$  za pomocą następującego warunku

$$f_k(\xi^t = 0) \ge f_m(\xi^t = 0),$$
 (2.42)

poszukiwana jest taka funkcja  $f_k(\xi^t)$ , która reprezentuje najbardziej wytężony element w konstrukcji, Rysunek 2.3. Wytężenie w elemencie k jest zmniejszane poprzez zwiększanie przyrostu odkształceń plastycznych (2.36), co zwykle powoduje wzrost wytężenia w innym elemencie  $f_m(\xi^t)$ . Możliwe są dwa przypadki, w których proces zwiększania przyrostu ( $\Delta \varepsilon^p$ )<sup>t</sup> zostaje przerwany.

- 1. Gdy wytężenie w elementach k i m jest równe, punkt  $\xi_1^t$  na Rysunku 2.3, a dalszy przyrost odkształceń plastycznych spowodowałby niepożądany wzrost wytężenia w elemencie m.
- 2. Gdy nie można już zmniejszyć wytężenia  $f_k(\xi^t)$  poprzez dalszy przyrost odkształceń plastycznych i funkcja osiąga minimum, punkt  $\xi_2^t$  na Rysunku 2.3.

Wyznaczona w ten sposób wartość  $\xi^t$  determinuje wielkość przyrostów  $(\Delta \varepsilon^p)^t$  oraz  $(\Delta \sigma)^t$ i pozwala określić stan konstrukcji (wzory 2.37 oraz 2.38) na kroku t. Następny krok t+1jest wykonywany analogicznie.

Proces trwa aż do osiągnięcia zadanej, globalnej wielkości przyrostu ( $\Delta \varepsilon^p$ ), lub osiągnięcia minimalnej wielkości przyrostu ( $\Delta \varepsilon^p$ )<sup>t</sup> na kroku t. W przypadku określania mnożnika przystosowania  $\eta$ , musi być spełnione dodatkowe ograniczenie dotyczące stanu naprężeń. Maksymalne wytężenie pochodzące od pola odkaształceń plastycznych konstrukcji nieobciążonej  $\sigma_{zred}((\varrho_{ij}^{\eta})_m)$  nie może przekroczyć maksymalnego wytężenia konstrukcji obciążonej  $\sigma_{zred}((\sigma_{ij}^{E\eta})_m + (\varrho_{ij}^{\eta})_m)$ . W przypadku określania mnożnika nośności granicznej  $\xi_l$  brane pod uwagę jest jedynie maksymalne wytężenie  $\sigma_{zred}((\sigma_{ij}^{E\xi_l})_m + (\varrho_{ij}^{\xi_l})_m)$ .

Ostatecznie, mnożniki przystosowania  $\eta$ oraz nośności granicznej $\xi_l$ wynoszą, odpowiednio

$$\eta = \frac{\sigma_0}{\sigma_{zred}((\sigma_{ij}^{E\eta})_m + (\varrho_{ij}^{\eta})_m)}, \qquad (2.43)$$

$$\xi_l = \frac{\sigma_0}{\sigma_{zred}((\sigma_{ij}^{E\xi_l})_m + (\varrho_{ij}^{\xi_l})_m)}, \qquad (2.44)$$

w których  $\sigma_0$  oznacza naprężenie uplastyczniające w przypadku jednoosiowego rozciągania. Ponadto, metodą min-max można wyznaczyć mnożnik sprężysty  $\xi_e$ , który określa obciążenie odpowiadające pierwszemu uplastycznieniu się konstrukcji.

# ROZDZIAŁ 3

## Wybrane metody analizy niezawodności konstrukcji

W tym rozdziale zawarte są podstawowe wiadomości dotyczące analizy niezawodności elementu oraz opisy wybranych, najbardziej reprezentatywnych metod analizy niezawodności takich jak FORM, SORM i Monte Carlo. Metody te stały się podstawą do stworzenia szeregu nowych algorytmów, opracowanych w celu skrócenia czasu obliczeń różnych, spotykanych w praktyce zadań. Proponowana w dalszej części niniejszej pracy metoda powierzchni odpowiedzi częściowo wykorzystuje algorytm metody FORM.

Próbę usystematyzowania metod analizy niezawodności podjęto już w 1981 roku<sup>1)</sup>. Wyróżniono wtedy następujące trzy klasy:

- I Metody tej klasy to takie, które zamiast wyznaczać dokładną wartość prawdopodobieństwa awarii weryfikują czy niezawodność konstrukcji jest wystarczająca. W praktyce to podejście jest realizowane przez zastosowanie częściowych współczynników bezpieczeństwa.
- II Metody reprezentujące tę klasę to FORM i SORM. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest aproksymowana przez ekwiwalentną funkcję rozkładu normalnego, a prawdopodobieństwo awarii jest wyznaczane przy założeniu idealizacji powierzchni granicznej.
- III Metodami reprezentatywnymi dla tej klasy są Monte Carlo oraz całkowanie numeryczne wielowymiarowej całki określającej prawdopodobieństwo awarii. Powyższe metody pozwalają wyznaczyć dokładną wartość tej całki, stosując zadaną funkcję gęstości prawdopodobieństwa wszystkich zmiennych losowych.

Koncepcje metody powierzchni odpowiedzi w analizie niezawodności odpowiadają

<sup>&</sup>lt;sup>1)</sup> Joint Committee on Structural Safety, *General principles on reliability for structural design*, IABSE, 1981.

klasie II, choć można również znaleźć metody bliższe klasie III (por. [117]). Metody klasy II realizowane są zarówno w oryginalnej przestrzeni zmiennych losowych (por. [12, 93]), jak i w standardowej przestrzeni gaussowskiej (por. [52, 40, 57]). Opracowane w niniejszej pracy metody powierzchni odpowiedzi reprezentują poziom II i są realizowane zarówno w standardowej przestrzeni gaussowskiej, jak i w oryginalnej przestrzeni zmiennych losowych.

#### 3.1. Wprowadzenie

Niezawodność konstrukcji jest stosunkowo szerokim pojęciem. Obejmuje ono wszystkie zagadnienia związane z takim projektowaniem konstrukcji, aby nadawała się do użytkowania zgodnego z jej przeznaczeniem. Analizowana w pracy niezawodność jest ograniczona do rozważania bezawaryjności, czyli takiego stanu konstrukcji, w którym w określonych warunkach nadaje się ona do eksploatacji w ciągu określonego przedziału czasu. Przeciwieństwem bezpiecznego stanu konstrukcji jest jej awaria, stan w którym konstrukcja nie nadaje się do eksploatacji. Zakłada się istnienie tylko tych dwóch stanów, przy czym awaria nie musi oznaczać zniszczenia konstrukcji. Stan konstrukcji identyfikuje narzucone przez projektanta kryterium awarii (zwykle jest to kryterium naprężeniowe lub przemieszczeniowe). Ponadto w pracy rozpatrywana jest tylko analiza niezawodności elementu, czyli przypadek, kiedy stan całej konstrukcji lub jej części określa tylko jedno kryterium awarii<sup>2)</sup>.

Analiza niezawodności konstrukcji polega na określeniu, jaki wpływ na stan konstrukcji ma losowa natura opisujących ją parametrów podstawowych  $X_1, X_2, \ldots, X_n$ . Parametrami tymi mogą być stałe materiałowe, obciążenie czy też wymiary geometryczne. W niniejszej pracy wielkości te są traktowane jako zmienne losowe (nie będą brane pod uwagę procesy losowe). Grupujący je wektor  $\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^{\mathrm{T}}$  nazywany jest również wektorem zmiennych bazowych. Realizacje  $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^{\mathrm{T}}$  wektora  $\boldsymbol{X}$  należą do przestrzeni Euklidesowej  $\mathcal{X}$ . Ocene stanu konstrukcji umożliwia kryterium awarii – losowa funkcja graniczna  $q(\mathbf{X})$ . Wartości tej funkcji dzielą przestrzeń  $\mathcal{X}$  następująco

- $g(\boldsymbol{x})\leqslant 0$  : obszar awarii  $\Omega_f$ ,  $g(\boldsymbol{x})=0$  : powierzchnia graniczna, (3.1a)
- (3.1b)

$$g(\boldsymbol{x}) > 0$$
: obszar bezpieczny  $\Omega_s$ . (3.1c)

Niezawodność konstrukcji jest więc prawdopodobieństwem występowania realizacji zmiennych bazowych X w obszarze zapewniającym bezpieczną pracę konstrukcji co najogólniej można zdefiniować następująco

$$\mathcal{R} = 1 - P_f \,, \tag{3.2}$$

<sup>&</sup>lt;sup>2)</sup> W przypadku, gdy stan bezpieczeństwa konstrukcji jest zdefiniowany układem stanów wielu elementów (rozważanych jest kilka kryteriów awarii), ma zastosowanie systemowa analiza niezawodności (zob. np. [78], [115]). Wtedy znajomość niezawodności każdego elementu wraz z wpływem jego awarii na system jest brana pod uwagę w ocenie niezawodności całego systemu.

gdzie  $P_f$  oznacza prawdopodobieństwo awarii. Prawdopodobieństwo  $P_f$  jest sumą wszystkich zdarzeń należących do obszaru  $\Omega_f$  co wyraża następująca n wymiarowa całka

$$P_f = \mathbb{P}[\boldsymbol{X} \in \Omega_f] = \mathbb{P}[g(\boldsymbol{X}) \leqslant 0] = \int_{\Omega_f} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \,, \tag{3.3}$$

gdzie  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$  jest funkcją łącznej gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych  $\mathbf{X}$ . Istotę powyższego zagadnienia ilustruje Rysunek 3.1. W dwuwymiarowej przestrzeni zmiennych losowych  $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^{\mathrm{T}}$  zaznaczone zostały zbiory (3.1a), (3.1b), (3.1c) oraz warstwice łącznej funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa  $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ .



RYSUNEK 3.1. Powierzchnia graniczna g(x) = 0, obszar bezpieczny i obszar awarii w przestrzeni zmiennych X

Tak postawione zadanie wydaje się nie nastręczać zbyt wielu problemów. Jednak kilka aspektów komplikujących rozwiązanie tego zadania jest wartych odnotowania. Przede wszystkim często dostępne dane statystyczne są niekompletne, a więc gęstość prawdopodobieństwa  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  zwykle nie jest znana. Również przyjęty model zachowania konstrukcji może zawierać pewną niedokładność rzutującą na ciągłość funkcji granicznej  $g(\mathbf{X})$  (lub jej pierwszej pochodnej). Za pomocą metody wnioskowania beyesowskiego można uwzględnić wpływ niepewności związanych ze stosowanym modelem oraz z przyjętymi parametrami rozkładów zmiennych losowych, zob. [18, 45]<sup>3</sup>. W niniejszej pracy nie brano jednak pod uwagę wpływu tych niepewności, uwzględniając jedynie losowości tkwiące w fizycznej naturze parametrów opisujących konstrukcję.

<sup>&</sup>lt;sup>3)</sup> Metoda wnioskowania beyesowskiego pozwala uaktualniać początkowe założenia dotyczące funkcji granicznej oraz parametrów rozkładów wykorzystując informacje o pracy konstrukcji uzyskanych w późniejszym czasie.

Najistotniejszy technicznie problem dotyczy sposobu wyznaczenia wartości całki (3.3). Duża liczba zmiennych bazowych  $\mathbf{X}$  oraz niejawna najczęściej postać funkcji  $g(\mathbf{X})$  czynią numeryczne całkowanie wyrażenia (3.3) niewykonalnym. Jedynie w prostych przypadkach, gdy funkcja graniczna jest dana jawnie, analiza niezawodności bazuje na numerycznym obliczaniu całki (3.3) (zob. [125]). Analiza niezawodności rzeczywistych konstrukcji jest przeprowadzana za pomocą metod przybliżonych. W tej grupie metod kluczowym czynnikiem jest czas trwania obliczeń. W przybliżeniu jest to czas potrzebny do uzyskania pojedynczej wartości funkcji  $g(\mathbf{x})$  (odpowiadającej realizacji  $\mathbf{x}$ ) pomnożony przez liczbę N realizacji koniecznych do otrzymania oszacowania  $P_f$ . Wartość funkcji  $g(\mathbf{x})$  najczęściej jest obliczana za pomocą MES, co zwykle oznacza złożoną i czasochłonną analizę, zob. Rozdziały 2.5 i 5.6. W związku z tym, liczba realizacji N powinna być jak najmniejsza żeby prowadzona analiza była efektywna. Wśród metod przybliżonych jest duża grupa bardzo efektywnych metod, które bazują na aproksymacji  $\hat{g}(\mathbf{X})$  niejawnej funkcji  $g(\mathbf{X})$ . Metoda powierzchni odpowiedzi należy do tej grupy metod.

W praktyce zamiast niewygodnej miary jaką jest  $P_f$  podaje się wartość tzw. wskaźnika niezawodności, który jest zdefiniowany następująco (zob. [71])

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) . \tag{3.4}$$

 $\Phi^{-1}(\cdot)$  w powyższym wzorze oznacza funkcję odwrotną dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego. Poniższym wielkościom prawdopodobieństwa awarii  $P_f$  odpowiadają następujące wartości wskaźnika niezawodności

$P_f$	$\frac{1}{1450} \simeq 6.9 \cdot 10^{-4}$	$\frac{1}{9090} \simeq 1.1 \cdot 10^{-4}$	$\frac{1}{77000} \simeq 1.3 \cdot 10^{-5}$	$\frac{1}{770000} \simeq 1.3 \cdot 10^{-6}$	$10^{-7}$
$\beta$	3.2	3.7	4.2	4.7	5.2

które często w literaturze są przyjmowane jako graniczne, przy określonych klasach bezpieczeństwa konstrukcji (zob. [80, 22]). Wskaźnik  $\beta$  wraz z rozwojem przybliżonych metod analizy niezawodności także ewoluował, przyjmując w nazwie rozszerzenie oznaczające sposób oszacowania  $P_f$  (por. z punktami 3.1.2, 3.1.3). Najczęściej wskaźnik  $\beta$  jest kojarzony ze wskaźnikiem zaproponowanym przez Hasofera i Linda (zob. [46]).

#### 3.1.1. Gaussowska przestrzeń standardowa ${\mathcal U}$

W analizie niezawodności powszechnie jest stosowana gaussowska przestrzeń standardowa  $\mathcal{U}$ . Jest to zbiór niezależnych, standaryzowanych zmiennych normalnych  $\boldsymbol{U} = [U_1, U_2, \ldots, U_n]^{\mathrm{T}}$ , którego łączna gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zdefiniowana jest następująco

$$\varphi_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}) = \prod_{i=1}^n \varphi(u_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right], \qquad (3.5)$$

gdzie I oznacza jednostkową macierz kowariancji. Rozkład miary prawdopodobieństwa w przestrzeni  $\mathcal{U}$  jest osiowo symetryczny, a wartość funkcji  $\varphi_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$  maleje wykładniczo z kwadratem odległości od początku układu współrzędnych. Ponadto, miarą prawdopodobieństwa zbioru  $L_U = \{\boldsymbol{u} : l(\boldsymbol{u}) = a_0 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} \leq 0\}$  jest jednowymiarowa dystrybuanta

standardowego rozkładu normalnego  $\mathbb{P}[l(U) \leq 0] = \Phi(-\beta)$ , gdzie

$$\beta = \operatorname{sign}[l(\mathbf{0})] \,\delta^* \,, \quad \delta^* = \frac{|a_0|}{\sqrt{\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \mathbf{a}}} \,, \tag{3.6}$$

przy czym  $\delta^*$  jest odległością hiperpłaszczyzny  $l(\boldsymbol{u}) = 0$  od początku układu współrzędnych. Własność tą można łatwo sprawdzić na przykładzie hiperpłaszczyzny prostopadłej do jednej z osi przestrzeni np.  $u_i = \delta^*$ , pamiętając jednocześnie o własności osiowej symetrii przestrzeni  $\mathcal{U}$ .



RYSUNEK 3.2. Zagadnienie niezawodności w gaussowskiej standardowej przestrzeni $\mathcal U.$ 

Wykorzystanie własności przestrzeni  $\mathcal{U}$  w analizie niezawodności umożliwia transformacja całego problemu z przestrzeni podstawowych zmiennych losowych do gaussowskiej przestrzeni standardowej U = T(X) (Rysunek 3.2). W ogólnym przypadku zależnych zmiennych losowych stosowana jest tzw. transformacja Rosenblatta (zob. [97]). Po raz pierwszy w analizie niezawodności została ona zaproponowana przez Hohenbichlera i Rackwitza (zob. [51]). Realizacje  $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$  bazowych zmiennych losowych  $[X_1, X_2, \ldots, X_n]^T$  są transformowane na realizacje  $[u_1, u_2, \ldots, u_n]^T$ niezależnych zmiennych standardowych  $[U_1, U_2, \ldots, U_n]^{\mathrm{T}}$ następująco

$$\Phi(u_1) = H_1(x_1) = F_1(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f_1(t) dt ,$$
  

$$\vdots$$
  

$$\Phi(u_i) = H_i(x_i|x_1, x_2..., x_{i-1}) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{f_i(x_1, x_2..., x_{i-1}, t)}{f_{i-1}(x_1, x_2..., x_{i-1})} dt , \quad i = 2, 3..., n ,$$
(3.7)

przy czym gęstość prawdopodobieństwa rozkładu brzegowego jest zdefiniowana nwymiarową całką

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \, \mathrm{d}x_{i+1} \mathrm{d}x_{i+2} \dots \mathrm{d}x_n \,, \tag{3.8}$$

a  $H_i(\cdot|\cdot)$  oznacza warunkową dystrybuantę zmiennej  $X_i$ . Transformacja ta ze względu na monotoniczność  $\Phi(\cdot)$  oraz  $H_i(\cdot|\cdot)$  jest jednoznaczna. Miara prawdopodobieństwa dowolnego obszaru  $K_X$  z przestrzeni  $\mathcal{X}$  po transformacji do przestrzeni  $\mathcal{U}$ , w której obrazem  $K_X$ jest obszar  $K_U$  jest zachowana, czyli  $\mathbb{P}[\mathbf{X} \in K_X] = \mathbb{P}[\mathbf{U} \in K_U]$ . Sformułowanie całego problemu niezawodności w przestrzeni  $\mathcal{U}$  jest więc równoważne sformułowaniu oryginalnemu. Transformacja problemu  $\mathbf{U} = \mathbf{T}(\mathbf{X})$  do przestrzeni  $\mathcal{U}$ , w której poszukiwane jest rozwiązanie, może być przedstawiona następująco:

prawdopodobieństwo awarii

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Delta_f} \varphi_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{u} \,, \tag{3.9}$$

– obszar awarii  $\mathcal{X} \to \mathcal{U}$ 

$$\Omega_f = \{ \boldsymbol{x} : g(\boldsymbol{x}) \leq 0 \} \longrightarrow \Delta_f = \{ \boldsymbol{u} : G(\boldsymbol{u}) \leq 0 \}, \qquad (3.10)$$

– powierzchnia graniczna  $\mathcal{X} \to \mathcal{U}$ 

$$g(\boldsymbol{x}) = 0 \longrightarrow g[T^{-1}(\boldsymbol{u})] = G(\boldsymbol{u}) = 0,$$
 (3.11)

gdzie  $\Delta_f$  jest obszarem awarii, a G(U) jest funkcją graniczną w przestrzeni  $\mathcal{U}$ .

Transformacja U = T(X) w przypadku niezależnych zmiennych losowych o dowolnych rozkładach ma charakter nieliniowy i może być przedstawiona w następującej postaci

$$u_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)]$$
  $i = 1, ..., n$ , (3.12)

gdzie  $F_{X_i}$  jest dystrybuantą rozkładu zmiennej  $X_i$ . W przypadku gdy zmienne mają rozkład normalny i są skorelowane transformacja zmiennych losowych do przestrzeni  $\mathcal{U}$  jest liniowa.

#### 3.1.2. Wskaźnik niezawodności Cornella

Jedną z pierwszych, istotnych prób efektywnego szacowania całki (3.3) w praktycznych zadaniach analizy niezawodności konstrukcji, gdy nieznane są rozkłady podstawowych zmiennych losowych  $\boldsymbol{X}$ , podał Cornell [14]. Tzw. wskaźnik niezawodności Cornella został zdefiniowany przy założeniu znajomości jedynie wektora wartości średnich  $\bar{\boldsymbol{X}} = [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots \bar{X}_n]^{\mathrm{T}}$  i macierzy kowariancji  $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}}$ , oraz przyjęcia rozkładu normalnego zmiennych  $\boldsymbol{X}$ . Idea metody polega na linearyzacji funkcji  $g(\boldsymbol{X})$  w punkcie  $\bar{\boldsymbol{X}}$ , co zostało osiągnięte przez jej rozwinięcie w tym punkcie w szereg Taylora i uwzględnienie jedynie dwóch pierwszych wyrazów tego rozwinięcia

$$\hat{g}(\boldsymbol{X}) = g(\bar{\boldsymbol{X}}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(\boldsymbol{X})}{\partial x_i} \Big|_{\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{X}}} (X_i - \bar{X}_i) .$$
(3.13)

Funkcja  $\hat{g}(\mathbf{X})$  również ma rozkład normalny, stąd oszacowanie prawdopodobieństwa awarii może być zdefiniowane następująco

$$\mathbb{P}[\hat{g}(\boldsymbol{X}) \leqslant 0] = \mathbb{P}\left[\frac{\hat{g} - \bar{\hat{g}}}{\sigma_{\hat{g}}} \leqslant -\frac{\bar{\hat{g}}}{\sigma_{\hat{g}}}\right] = \Phi\left(-\frac{\bar{\hat{g}}}{\sigma_{\hat{g}}}\right) = \Phi(-\beta_{C}) , \qquad (3.14)$$

gdzie wartość oczekiwaną  $\bar{g}(\mathbf{X})$  oraz wariancję  $\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{X})$  można w prosty sposób wyznaczyć dzięki przybliżonej postaci funkcji granicznej (3.13), a  $\beta_C$  jest wskaźnikiem niezawodności Cornella<sup>4)</sup>.

Tak zdefiniowany sposób szacowania prawdopodobieństwa awarii posiada jednak istotną wadę. Wynika ona z przyjęcia punktu  $\bar{X}$  (w większości przypadków  $g(\bar{X}) \neq 0$ ) do przeprowadzenia w nim linearyzacji funkcji g(X) (3.13). Postać  $\hat{g}(X)$  jest więc zależna od różnych sformułowań funkcji granicznej, czyli równoważne w rzeczywistości funkcje graniczne – o identycznej postaci powierzchni granicznej g(x) = 0 (zob. Rysunek 3.1) – w tym wypadku mogą mieć różne powierzchnie graniczne  $\hat{g}(X) = 0$ . Ten brak niezmienniczości może prowadzić do istotnych błędów w oszacowaniu prawdopodobieństwa awarii.

#### 3.1.3. Wskaźnik niezawodności Hasofera–Linda

Wskaźnik niezawodności zaproponowany przez Hasofera i Linda [46] jest następnym, istotnym krokiem poczynionym w formułowaniu metod analizy niezawodności. Przede wszystkim rozwiązuje problem podstawowej wady wskaźnika Cornella, czyli braku niezmienniczości.

Propozycja Hasofera i Linda bazuje na tych samych założeniach dotyczących ograniczonej znajomości danych charakteryzujących zmienne losowe, co omawiany powyżej wskaźnik Cornella. Linearyzacja funkcji granicznej jest przeprowadzana w przestrzeni  $\mathcal{U}$ 

<sup>&</sup>lt;sup>4)</sup> W literaturze można spotkać następujące oznaczenie wskaźnika Cornella:  $\beta_{\text{MVFOSM}}$  (ang. *Mean-Value, First-Order, Second-Moment*).

poprzez rozwinięcie funkcji  $G(\boldsymbol{u})$  w szereg Taylora w leżącym na powierzchni granicznej  $G(\boldsymbol{u}) = 0$  punkcie, który jest punktem najbliższym początkowi układu współrzędnych. Punkt ten zwykle wyróżniany gwiazdką  $\boldsymbol{u}^*$  (w przestrzeni  $\mathcal{X}$  analogicznie jako  $\boldsymbol{x}^*$ ) jest nazywany punktem projektowym.

Równoważne sformułowania funkcji granicznej w efekcie zawsze będą miały taką samą postać przecięcia  $\hat{G}(\boldsymbol{u}) = 0$ . Ze względu na własności gaussowskiej przestrzeni standardowej, wartość łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa odpowiadająca awarii w tym punkcie jest największa. W konsekwencji metoda daje często zadowalające przybliżenie nawet nieliniowej postaci powierzchni granicznej  $G(\boldsymbol{u}) = 0$ . W przypadku, gdy  $G(\boldsymbol{u}) = 0$  jest liniowa (zob. Rysunek 3.2), oszacowanie  $P_f$  jest dokładne.

W ten sposób zadanie oszacowania wartości wielowymiarowej całki (3.3) zostało sprowadzone do zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami, jakim jest procedura poszukiwania punktu projektowego

$$\|\boldsymbol{u}^*\| = \min_{G(\boldsymbol{u})=0} \|\boldsymbol{u}\| = \delta^* ,$$
 (3.15)

gdzie  $\|\cdot\|$ jest normą euklidesową. Prawdopodobieństwo awarii szacowane za pomocą wskaźnika Hasofera–Linda<sup>5)</sup> wynosi

$$P_f = \Phi(-\beta_{HL}) , \qquad (3.16)$$

gdzie  $\beta_{HL}$  oraz  $\delta^*$  (zob. (3.6)) to wielkości zdefiniowane identycznie do omawianych w punkcie dotyczącym własności gaussowskiej przestrzeni standardowej (por. punkt 3.1.1). W pracy [46] Hasofera i Linda został zaproponowany algorytm służący lokalizacji punktu projektowego. Jednak powszechnie z tym algorytmem łączy się nazwiska Rackwitza i Fiesslera [92], którzy zastosowali go razem z metodą transformacji dowolnych zmiennych losowych do przestrzeni  $\mathcal{U}$ . Algorytm RF jest wykorzystywany w opracowanej w niniejszej pracy metodzie powierzchni odpowiedzi. Dlatego też, jego szczegółowy opis jest zamieszczony w dalszej części rozdziału.

#### 3.2. Metoda pierwszego rzędu (FORM)

Metoda FORM (ang. First Order Reliability Method) w pełni wykorzystuje opis probabilistyczny zmiennych losowych poprzez zastosowanie transformacji Rosenblatta (zob. 3.7). Jest to podstawowa różnica w porównaniu do metody szacowania  $P_f$  za pomocą wskaźnika Hasofera i Linda (por. punkt 3.1.3), w której założenie normalności zmiennych może prowadzić do błędnych wniosków w ocenie niezawodności konstrukcji. W szczególności, gdy opis probabilistyczny zmiennych dotyczy obciążeń takich jak wiatr czy śnieg<sup>6</sup>, które w pewnym uproszczeniu można traktować jako zmienne losowe o rozkładach prawdopodobieństwa Gumbela lub Frecheta (rozkłady te odpowiadają rozkładom maksymalnych wartości tych obciążeń w rozpatrywanym przedziale czasu).

<sup>&</sup>lt;sup>5)</sup> W literaturze można spotkać następujące oznaczenie wskaźnika Hasofera–Linda:  $\beta_{\text{FOSM}}$ , (ang. *First–Order, Second–Moment*).

<sup>&</sup>lt;sup>6)</sup> Tego typu obciążenia powinny być traktowane jako procesy losowe, zob. [6, 80].

Idea metody pierwszego rzędu polega na aproksymacji w gaussowskiej przestrzeni standardowej  $\mathcal{U}$  powierzchni granicznej  $G(\mathbf{u}) = 0$  wielomianem pierwszego stopnia, hiperpłaszczyzną, i na jej podstawie oszacowaniu wartości całki (3.9). Hiperpłaszczyzna ta (por. punkt 3.1.1) opisana równaniem

$$l(\boldsymbol{U}) = -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{\beta}, \qquad (3.17)$$

jest styczna do G(U) w punkcie projektowym (zob. Rysunek 3.3, na którym poziom intensywności koloru niebieskiego odpowiada wartości łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa). Wskaźnik  $\beta = \beta_{HL} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \beta_{FORM}$  jest zdefiniowany tak jak wspomniany już



RYSUNEK 3.3. Przybliżenie pierwszego rzędu wartości prawdopodobieństwa awarii.

wskaźnik Hasofera i Linda (zob. 3.6), a wektor  $\alpha$  jest określony następująco

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\boldsymbol{\nabla}G(\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{\nabla}G(\boldsymbol{u})\|}\Big|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*} \,. \tag{3.18}$$

Głównym problemem w wyznaczeniu oszacowania  $P_f$  metodą FORM jest znalezienie położenia punktu projektowego  $u^*$ . To zadanie może być rozwiązane efektywnie za pomocą kilku algorytmów optymalizacyjnych z ograniczeniami (zob. [70, 1, 121]). Prezentowany poniżej, klasyczny w analizie niezawodności algorytm RF, ze względu na swą efektywność oraz prostotę stał się punktem wyjścia części procedur. Również prezentowana metoda powierzchni odpowiedzi jest oparta na tym rozwiązaniu. Zadanie lokalizacji  $\boldsymbol{u}^*$ , zob. (3.15), może być przedstawione w równoważnej postaci następująco

$$\min_{G(\boldsymbol{u})=0} Q(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}.$$
(3.19)

Powyższe zadanie zostało rozwiązane poprzez zastąpienie funkcji celu Q(u) jej rozwinięciem w szereg Taylor'a wokół punktu  $u^{(k)}$  w następującej postaci

$$\hat{Q}(\Delta \boldsymbol{u}^{(k)}) = Q(\boldsymbol{u}^{(k)}) + \boldsymbol{\nabla} Q^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{(k)}) \Delta \boldsymbol{u}^{(k)} + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{u}^{(k)^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{\nabla}^{2} Q(\boldsymbol{u}^{(k)}) \Delta \boldsymbol{u}^{(k)}$$

$$= \boldsymbol{u}^{(k)^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{u}^{(k)} + 2 \boldsymbol{u}^{(k)^{\mathrm{T}}} \Delta \boldsymbol{u}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{u}^{(k)^{\mathrm{T}}} \Delta \boldsymbol{u}^{(k)}, \qquad (3.20)$$

gdzie k oznacza kolejną iterację wektora  $\boldsymbol{u}$  oraz podobnie, linearyzacji funkcji  $G(\boldsymbol{u})$ 

$$\hat{G}(\Delta \boldsymbol{u}^{(k)}) = G(\boldsymbol{u}^{(k)}) + \boldsymbol{\nabla} G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{(k)}) \Delta \boldsymbol{u}^{(k)} .$$
(3.21)

W ten sposób zadanie (3.19) zostało sprowadzone do zadania znalezienia optymalnego przyrostu  $\Delta \boldsymbol{u}^{(k)} = \boldsymbol{u}^{(k+1)} - \boldsymbol{u}^{(k)}$ , czyli

$$\min_{\hat{G}(\boldsymbol{u})=0} \hat{Q}(\Delta \boldsymbol{u}^{(k)}) .$$
(3.22)

Warunek konieczny istnienia w punkcie  $\boldsymbol{u}^{(k)}$ minimum lokalnego wynika z warunku stacjonarności funkcji Lagrange'a

$$L(\Delta \boldsymbol{u}^{(k)}, \lambda) = \boldsymbol{u}^{(k)^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{u}^{(k)} + 2\boldsymbol{u}^{(k)^{\mathrm{T}}} \Delta \boldsymbol{u}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{u}^{(k)^{\mathrm{T}}} \Delta \boldsymbol{u}^{(k)} - \lambda \left( G(\boldsymbol{u}^{(k)}) + \boldsymbol{\nabla} G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{(k)}) \Delta \boldsymbol{u}^{(k)} \right) , \qquad (3.23)$$

gdzie  $\lambda$  oznacza tzw. mnożnik Lagrange'a. Warunek konieczny jest określony przez tzw. kryteria Kuhna–Tuckera (zob. [3, 44]) dane równaniami

$$\boldsymbol{\nabla}L = 2\boldsymbol{u}^{(k)} + 2\Delta\boldsymbol{u}^{(k)} - \lambda\boldsymbol{\nabla}G(\boldsymbol{u}^{(k)}) = 2\boldsymbol{u}^{(k+1)} - \lambda\boldsymbol{\nabla}G(\boldsymbol{u}^{(k)}) = 0 , \qquad (3.24)$$

$$G(\boldsymbol{u}^{(k)}) + \boldsymbol{\nabla} G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{(k)}) \boldsymbol{u}^{(k+1)} - \boldsymbol{\nabla} G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{(k)}) \boldsymbol{u}^{(k)} = 0.$$
(3.25)

Poszukiwany związek na znajdowanie punktu projektowego  $u^*$  został wyznaczony poprzez wyeliminowanie mnożnika Lagrange'a  $\lambda$  z powyższych równań. Poniższy wzór iteracyjny

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\nabla}G(\boldsymbol{u}^{(k)})\|^2} \left(\boldsymbol{\nabla}G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{(k)})\boldsymbol{u}^{(k)} - G(\boldsymbol{u}^{(k)})\right)\boldsymbol{\nabla}G(\boldsymbol{u}^{(k)}), \quad (3.26)$$

w którym iteracje kontynuowane są aż do spełnienia warunku

$$\left|u_{i}^{(k+1)}-u_{i}^{(k)}\right| \leqslant \epsilon$$
 dla wszystkich *i* oraz  $\left|g(\boldsymbol{x}^{*})\right| \leqslant \epsilon$  (3.27)

został zaproponowany pierwszy raz przez Hasofera i Linda [46]. We wzorze (3.27)  $\epsilon$  oznacza zadaną tolerancję na współliniowość dwóch ostatnich wektorów  $\boldsymbol{u}^{(k)}$  i  $\boldsymbol{u}^{(k+1)}$ , oraz na wartość funkcji granicznej  $g(\boldsymbol{x})$  (przy czym  $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{u}^*)$ ) w przestrzeni oryginalnych zmiennych losowych  $\boldsymbol{X}$ .


RYSUNEK 3.4. Interpretacja geometryczna k-tej iteracji procesu poszukiwania punktu projektowego.

Związek (3.26) posiada przejrzystą interpretację geometryczną, Rysunek 3.4. Wystarczy zapisać (3.26) w następującej postaci

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \underbrace{\frac{1}{\|\boldsymbol{\nabla}G(\boldsymbol{u}^{(k)})\|} \left(\boldsymbol{\nabla}G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{(k)})\boldsymbol{u}^{(k)} - G(\boldsymbol{u}^{(k)})\right)}_{\text{długość}} \underbrace{\frac{\boldsymbol{\nabla}G(\boldsymbol{u}^{(k)})}{\|\boldsymbol{\nabla}G(\boldsymbol{u}^{(k)})\|}}_{\text{kierunek}}, \quad (3.28)$$

gdzie długość wektora  $\boldsymbol{u}^{(k+1)}$  jest sumą długości rzutu wektora  $\boldsymbol{u}^{(k)}$  na kierunek  $\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})$ oraz długości  $G(\boldsymbol{u}^{(k)})/||\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})||$ , która wynika z zastąpienia powierzchni granicznej śladem hiperpłaszczyzny  $\hat{G}(\boldsymbol{u}^{(k)}) = 0$  powstałej w skutek linearyzacji funkcji granicznej  $\hat{G}(\boldsymbol{u}^{(k)})$  w punkcie  $\boldsymbol{u}^{(k)}$ . Długość  $G(\boldsymbol{u}^{(k)})/||\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})||$  jest określona przez odcinek, którego jednym końcem jest punkt  $\boldsymbol{u}^{(k)}$  a drugim jego rzut ortogonalny na ślad  $\hat{G}(\boldsymbol{u}^{(k)}) = 0$ . Tangens kąta  $\gamma$  nachylenia hiperpłaszczyzny  $\hat{G}(\boldsymbol{u}^{(k)})$  można wyznaczyć za pomocą pochodnej kierunkowej tg $(\gamma) = \nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})/||\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})|| \cdot \nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)}) = ||\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})||$ , stąd  $G(\boldsymbol{u}^{(k)})/\operatorname{tg}(\gamma) = G(\boldsymbol{u}^{(k)})/||\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})||$ .

Zasadę działania procedury (3.26) przedstawia Rysunek 3.5. W punkcie  $\boldsymbol{u}^{(1)}$  obliczony gradient  $\nabla G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{(1)})$  wyznacza kierunek następnego kroku. Stąd, wektory  $\nabla G(\boldsymbol{u}^{(1)})$  oraz  $\boldsymbol{u}^{(2)}$  są równoległe. Długość drugiego kroku  $\|\boldsymbol{u}^{(2)}\|$  jest określona przez  $\boldsymbol{u}^{(1)}, G(\boldsymbol{u}^{(1)})$  oraz  $\nabla G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^{(1)})$ . Analogicznie w punkcie  $\boldsymbol{u}^{(2)}$  obliczany jest gradient  $\nabla G(\boldsymbol{u}^{(2)})$  oraz wartość funkcji granicznej w celu wyznaczenia położenia następnego punktu  $\boldsymbol{u}^{(3)}$ . Procedura zo-

staje przerwana gdy zostaną spełnione warunki zbieżności (3.27). Ostatni punkt  $\boldsymbol{u}^{(k+1)}$  jest poszukiwanym punktem projektowym  $\boldsymbol{u}^*$ .



RYSUNEK 3.5. Graficzne przedstawienie procesu poszukiwania punktu projektowego.

Zwykle na każdym kroku procedury (3.26) realizowanej w gaussowskiej standardowej przestrzeni  $\mathcal{U}$  wykonywana jest transformacja do  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{u})$  i z  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$  przestrzeni oryginalnych zmiennych losowych  $\mathcal{X}$ , w której są obliczane wartości funkcji granicznej oraz gradientu. Gradient  $\nabla G(\boldsymbol{u})$  ponadto jest transformowany do przestrzeni  $\mathcal{X}$  według reguły różniczkowania funkcji złożonej

$$\boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1} \boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{x}) , \qquad (3.29)$$

gdzie  $\boldsymbol{J} = [\partial u_i / \partial x_i]$  jest macierzą jakobianu transformacji  $\boldsymbol{T}$ .

W praktyce wadą procedury (3.26) okazała się powolna zbieżność, a w przypadku silnie nieliniowych powierzchni granicznych nawet jej brak. Ta niedogodność algorytmu RF została częściowo usunięta poprzez zastosowanie dodatkowo procedury redukcji długości kroku

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^{(k+1)} = \boldsymbol{u}^{(k)} + \alpha^{(k)} \Delta \boldsymbol{u}^{(k)} , \qquad (3.30)$$

gdzie  $\alpha^{(k)} < 1$  jest stałą, a nowy punkt  $\tilde{\boldsymbol{u}}^{(k+1)}$  (zamiast  $\boldsymbol{u}^{(k+1)}$ ) jest następnym punktem we wzorze iteracyjnym (3.26). Efektywny algorytm redukcji długości kroku został zaproponowany przez Abdo, zob. [1]. Algorytm ten wykorzystuje dwie strategie minimalizacji kierunkowej. Metodę opartą na aproksymacji kwadratowej oraz metodę złotego podziału odcinka (zob. [3, 119]). Ostatecznie, zmodyfikowany przez Abdo algorytm nazywany

jest algorytmem Abdo–Rackwitza–Fiesslera (ARF). ARF jest dostępny w wykorzystywanym w niniejszej pracy pakiecie analizy niezawodności COMREL [13]. W literaturze można znaleźć również inne propozycje modyfikacji procedury RF dotyczące algorytmów wyznaczania długości kroku (zob. [70, 121]).

Alternatywą w stosunku do procedury ARF są algorytmy rekurencyjnego programowania kwadratowego (ang. Sequential Quadratic Programming, SQP). Algorytmy te wykorzystują dodatkową informację o drugich pochodnych w procedurze określania kierunku poszukiwań. W praktyce informacja ta jest uzyskiwana poprzez aproksymację macierzy hesjanu funkcji Lagrange'a jedynie za pomocą gradientów<sup>7</sup>). W przypadku małej liczby zmiennych algorytmy SQP są najefektywniejsze. W zadaniach o dużej liczbie zmiennych (zob. [1]) względy numeryczne powodują, że efektywniejszy jest algorytm ARF. Prostota algorytmu ARF zadecydowała o wyborze tej metody w proponowanej w pracy metodzie powierzchni odpowiedzi.

Metoda FORM daje najlepsze rezultaty gdy istnieje tylko jeden punkt projektowy. Wtedy  $u^*$  jest rozwiązaniem zadania (3.15). W przypadku istnienia wielu lokalnych minimów znajdujących się w podobnej odległości jak  $u^*$  od początku układu współrzędnych, algorytm ARF nie daje gwarancji znalezienia globalnego minimum (zob. [19, 100]). Kolejnym utrudnieniem jest konieczność wyznaczania gradientu na każdym kroku procedury (3.26). W przypadku możliwości zastosowania efektywnych metod analizy wrażliwości rozważanego problemu i tym samym uzyskania w trakcie jednej symulacji wartości funkcji i gradientu, algorytm ARF staje się bardzo skuteczny. Gradient jednak zwykle jest wyznaczany metodą różnic skończonych, co oznacza dodatkową liczbę symulacji na każdym kroku procedury.

Oszacowanie  $P_f$  metodą FORM jest dokładniejsze gdy równanie powierzchni  $G(\mathbf{u}) = 0$  jest bliskie równaniu hiperpłaszczyzny. Aproksymacja pierwszego stopnia pomija mogące wystąpić w rzeczywistym równaniu człony nieliniowe, które mają wpływ na wielkość błędu popełnianego tą metodą. Dobrym oszacowaniem wpływu nieliniowości  $G(\mathbf{u}) = 0$  jest porównanie wyników z bardziej czasochłonną metodą aproksymacji drugiego rzędu SORM (por. punkt 3.3). Istotnym ograniczeniem stosowalności metody FORM, które pojawia się w praktyce inżynierskiej, jest nieciągłość pierwszej pochodnej funkcji granicznej  $G(\mathbf{U})$ . W takim przypadku metoda powierzchni odpowiedzi wydaje się być najlepszą alternatywą. Pomimo wielu ograniczeń analiza niezawodności metodą FORM umożliwia jednak wystarczająco dokładne oszacowanie  $P_f$  różnorodnych zagadnień inżynierskich.

### 3.3. Metoda drugiego rzędu (SORM)

Ideą metody SORM (ang. Second Order Reliability Method) jest oszacowanie prawdopodobieństwa awarii  $P_f$  na podstawie aproksymacji powierzchni granicznej  $G(\boldsymbol{u}) = 0$  hiperparaboloidą w znalezionym uprzednio punkcie projektowym  $\boldsymbol{u}^*$  (zob. [35, 11, 25]) przy

<sup>&</sup>lt;sup>7)</sup> Najpopularniejszą metodą przybliżania hesjanu jest metoda BFGS, (nazwa pochodzi od nazwisk Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno, zob. [41]).



RYSUNEK 3.6. Przybliżenie drugiego rzędu wartości prawdopodobieństwa awarii.

założeniu dwukrotnej różniczkowalności  $G(\boldsymbol{u}) = 0$ , Rysunek 3.6. Oszacowanie wartości wielowymiarowej całki (3.9) jest możliwe dzięki przybliżeniu, które zostanie przedstawione poniżej. Nie istnieje zbyt wiele metod oszacowania tej całki w przypadku aproksymacji  $G(\boldsymbol{u}) = 0$  wielomianami wyższych stopni (zob. [43]), w szczególności stopni nieparzystych, kiedy to oszacowanie SORM może prowadzić do grubych błędów (zob. [20]).

Zasadniczym wyróżnikiem metody są dwa obroty przestrzeni  $\mathcal{U}$  mające na celu znalezienie takiej transformacji, w której będzie można dokonać oszacowania  $P_f$ . Zadaniem pierwszego obrotu wokół początku układu współrzędnych jest zorientowanie przestrzeni  $\mathcal{U}$ tak, żeby jedna oś nowego układu współrzędnych  $[\boldsymbol{v}] = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ , np.  $v_n$  pokrywała się z kierunkiem wyznaczonym przez wektor  $\boldsymbol{u}^*$ . Nowa przestrzeń  $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$  jest wyznaczona przez następującą transformację ortogonalną

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U} , \qquad (3.31)$$

w której macierz transformacji  $Q_{n \times n}$  jest tworzona na podstawie wektora cosinusów kierunkowych  $\alpha$  (zob. (3.18)) wypełniających ostatnią kolumnę macierzy Q. Do wypełnienia pozostałych kolumn najczęściej jest stosowana metoda ortogonalizacji Grama–Schmidta [37]. Pozostałe osie mają więc dowolną, ortogonalną orientację. Drugi obrót ma na celu pewne szczególne zorientowanie pozostałych osi.

Punkt projektowy  $\boldsymbol{u}^*$  w przestrzeni  $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$  staje się punktem  $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}^* = \{0, \dots, 0, \beta\},$ w którym  $\beta$  (wskaźnik niezawodności FORM (3.6)) jest *n*-tą składową wektora  $\boldsymbol{v}^*$ . Powierzchnia graniczna  $G(\boldsymbol{u}) = 0$  natomiast w  $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$  staje się powierzchnią  $G_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}) = 0$ , przy czym wygodnie jest ją przedstawić w układzie współrzędnych  $[\boldsymbol{v}] = [\tilde{\boldsymbol{v}}, v_n]$  jako równanie rozwiązane względem ostatniej współrzędnej w postaci

$$G_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}) = G_{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{v}}, v_n) = 0 \quad \longrightarrow \quad v_n = f_{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{v}}) \;.$$

$$(3.32)$$

Oprócz informacji pochodzących z rozwiązania FORM, czyli lokalizacji punktu  $\boldsymbol{v}^*$ , paraboliczna aproksymacja powierzchni  $f_{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{v}})$  zastosowana w metodzie SORM wykorzystuje także dane o wartościach drugich pochodnych powierzchni  $f_{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{v}})$  w tym punkcie, zgromadzonych w macierzy  $\boldsymbol{H}_{(n-1)\times(n-1)}$  – hesjanu funkcji  $f_{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{v}})$ . To przybliżenie, nie zawierające członów liniowych (ze względu na zerowanie się pierwszych pochodnych  $f_{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{v}})$  w punkcie projektowym) można przedstawić następująco

$$v_n = f_{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{v}}) \approx s_{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{v}}) = \beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left. \frac{\partial^2 f_{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{v}})}{\partial v_i \, \partial v_j} \right|_{\tilde{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{0}} v_i v_j = \beta + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H} \tilde{\boldsymbol{v}} .$$
(3.33)

Drugi obrót jest wykonywany wokół osi  $v_n$ . Jego celem jest znalezienie takiego położenia osi współrzędnych  $\tilde{\boldsymbol{v}}$ , w którym hesjan jest macierzą diagonalną. Oznacza to rozwiązanie zagadnienia własnego macierzy  $\boldsymbol{H}$  a więc wyznaczenia wartości własnych oraz odpowiadających im wektorów własnych. Uporządkowany zbiór unormowanych wektorów własnych tworzy ortogonalną macierz  $\boldsymbol{R}$ . Ta macierz transformuje zadanie do nowej przestrzeni  $\mathcal{U}_{\mathcal{W}}$  o nowym układzie współrzędnych  $[\boldsymbol{w}] = [\tilde{\boldsymbol{w}}, w_n] = [w_1, \ldots, w_n = v_n]$ następująco

$$\tilde{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{V}} , \qquad (3.34)$$

w którym mieszane pochodne są równe zeru a wyrazy na diagonali odpowiadają wartościom krzywizn głównych  $\kappa_i$ , i = 1, ..., n-1 powierzchni granicznej. Macierz  $\mathbf{R}$  zapewnia spełnienie równania

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R} \boldsymbol{A} \boldsymbol{R}^T , \qquad (3.35)$$

w którym  $A_{(n-1)\times(n-1)}$  jest macierzą diagonalną  $A = [\kappa_i], i = 1, ..., n-1$ . Powierzchnia graniczna  $G_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}) = 0$  w nowym układzie współrzędnych staje się  $G_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w}) = 0$  i analogicznie do (3.32) przyjmuje następującą postać

$$w_n = f_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{w}}) . \tag{3.36}$$

Ostatecznie aproksymację paraboliczną funkcji granicznej przedstawia równanie

$$G_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w}) = f_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{w}}) - w_n \approx s_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{w}}) - w_n = \beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i w_i^2 - w_n , \qquad (3.37)$$

w którym krzywizny główne powierzchni  $w_n = f_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{w}})$  w punkcie  $\boldsymbol{w}^*$  odpowiadającym punktowi  $\boldsymbol{u}^*$  są postaci

$$\kappa_i = \frac{\partial^2 f_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{w}})}{\partial w_i^2} \bigg|_{\tilde{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{0}} \qquad i = 1, 2, \dots, n-1 .$$
(3.38)

Obydwie transformacje (3.31 i 3.34) są liniowe i zachowują początek układu współrzędnych w  $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ . W rezultacie wektor losowy  $\boldsymbol{U}$  jest transformowany tożsamościowo na wektor losowy niezależnych standaryzowanych zmiennych gaussowskich  $\boldsymbol{W}$ , a więc zadanie oszacowania prawdopodobieństwa awarii (zob. (3.9)) przyjmuje postać

$$P_f = \mathbb{P}[G(\boldsymbol{U}) \leqslant 0] = \mathbb{P}[G_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{W}) \leqslant 0] = \mathbb{P}[W_n \geqslant f_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{W}})] \approx \underline{P_{f2}} = \mathbb{P}[W_n \geqslant s_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{W}})]. \quad (3.39)$$

W przypadku parabolicznej aproksymacji funkcji granicznej (3.37) powyższe oszacowanie może być przedstawione następująco

$$P_{f2} = \mathbb{P}\left[W_n \leqslant \left(-\beta - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\kappa_i w_i^2\right)\right] = \int_{w_n \geqslant s_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{w}})} \varphi(w_n)\varphi_{n-1}(\tilde{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{w} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(-\beta - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\kappa_i w_i^2\right)\varphi_{n-1}(\tilde{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}) \, \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{w}} \,.$$
(3.40)

Oszacowanie  $P_{f2}$  zastosowane w pakiecie COMREL bazuje na rozwinięciu w punkcie w = 0 w szereg Taylora funkcji  $\ln \Phi(-\beta - w) \approx \ln \Phi(-\beta) - w\psi(-\beta)$ , (zob. [50]), w której

$$\psi(-\beta) = \varphi(-\beta)/\Phi(-\beta).$$
(3.41)

Wprowadzenie tego przybliżenia w (3.40) umożliwia wyznaczenie następującej aproksymacji prawdopodobieństwa awarii

$$P_{f2} \approx \Phi(-\beta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\psi(-\beta)\sum_{i=1}^{n-1}\kappa_{i}w_{i}^{2}\right) \prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}w_{i}^{2}\right) d\tilde{\boldsymbol{w}} = \\ = \Phi(-\beta)\prod_{i=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}w_{i}^{2}\left(1+\kappa_{i}\psi(-\beta)\right)\right) dw_{i} = \\ = \Phi(-\beta)\prod_{i=1}^{n-1}\left[1+\kappa_{i}\psi(-\beta)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$
(3.42)

Gdy  $\beta \to \infty$  powyższe oszacowanie jest zbieżne do rozwiązania dokładnego, w którym  $\psi(-\beta) \to \beta$ . Ten fakt został wykazany we wcześniejszej pracy (zob. [11]), która zawiera uproszczony wzór

$$P_{f2} \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + \kappa_i \beta]^{-\frac{1}{2}}.$$
 (3.43)

To oszacowanie  $P_{f2}$  daje dobre rezultaty w przypadku dużych wartości  $\beta = \beta_{FORM}$ . W przypadku małych wartości  $|\beta_{FORM}|$  należy zastosować oszacowanie

$$P_{f2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin\left(\beta t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{tg}^{-1}(-\kappa_i t)\right) \frac{\exp\left(-\frac{t2}{2}\right)}{t \prod_{i=1}^{n-1} \left[1 + \kappa_i^2 t^2\right]^{\frac{1}{4}}} \,\mathrm{d}t\,,\tag{3.44}$$

które zaproponowano w pracy [116]. Ponadto, w obydwu wzorach (3.42, 3.43) muszą być spełnione warunki  $\kappa_i > -1/\psi(-\beta)$  oraz  $\kappa_i > -1/\beta$ ,  $i = 1, \ldots, n-1$ , które wykluczają możliwość istnienia w otoczeniu  $\boldsymbol{u}^*$  (zob. (3.19)) innego punktu bliższego początkowi układu współrzędnych. Gdy wartości krzywizn są bliskie tym ograniczeniom, wyniki oszacowania  $P_{f2}$  za pomocą wzorów (3.42, 3.43) są błędne. Można wtedy szacować  $P_{f2}$  za pomocą metody IFFT<sup>8</sup>, zob. [123, 124, 122].

Aproksymacja funkcji granicznej paraboloidą pozwala na uniknięcie poważnych błędów w szacowaniu wartości  $P_f$ , jakie mogą stać się udziałem metody FORM (zob. np. [39]). Rozszerzone w porównaniu do FORM oszacowanie  $P_{f2}$  umożliwia zbadanie wpływu wielkości krzywizn  $\kappa_i$  na wielkość prawdopodobieństwa awarii. Odpowiadający oszacowaniu SORM wskaźnik niezawodności jest zdefiniowany następująco

$$\beta_{\text{SORM}} = -\Phi^{-1}(P_{f2}) . \tag{3.45}$$

Metoda SORM posiada niestety szereg istotnych ograniczeń. W większości praktycznych problemów występuje konieczność wyznaczenia macierzy hesjanu metodą różnic skończonych. W przypadku zadań o dużej liczbie zmiennych losowych n wymagana jest wtedy znaczna liczba symulacji n(n-1)/2. Ponadto, prawdopodobieństwo awarii  $P_{f2}$  jest szacowane przy pomocy lokalnej aproksymacji powierzchni granicznej i jest tym lepsze im bardziej kształt powierzchni granicznej jest bliski hiperparaboloidzie. Kolejnym, istotnym ograniczeniem metody SORM jest brak efektywnej oceny błędu oszacowania  $P_{f2}$  (zob. [23]).

Alternatywna, uproszczona metoda aproksymacji drugiego rzędu, która zakłada pokrywanie się osi układu z kierunkami krzywizn głównych po pierwszym obrocie (zob. 3.31) i tym samym nie wymaga rozwiązywania problemu własnego, została zaproponowana w pracy [20] (zob. też [121]). W metodzie tej, za pomocą zbioru punktów znajdujących się na powierzchni granicznej (zlokalizowanych na bazie planu osiowego, zob. 4.3, w pewnej ustalonej odległości od początku układu współrzędnych), otrzymywane są wartości krzywizn potrzebnych w oszacowaniu (3.42). Dodatkowy koszt tego oszacowania to liczba  $5 \div 7$  symulacji potrzebnych do lokalizacji powierzchni granicznej dla każdego z 2\*(n-1)punktów planu osiowego.

Kolejną propozycję analizy niezawodności za pomocą metody drugiego rzędu, porównanie otrzymanych wyników z rezultatami innych oszacowań  $P_{f2}$ , oraz próbę usystematyzowania metod drugiego rzędu można znaleźć w pracy [2].

Powyższe ograniczenia przyczyniły się do kontynuacji poszukiwań efektywnych metod analizy niezawodności. Zanim zostanie omówiona metoda powierzchni odpowiedzi w następnej części rozdziału zostaną przedstawione dwie metody należące do obszernej grupy metod symulacyjnych, które pozwalają uzyskać wiarygodne rozwiązanie w złożonych zagadnieniach o dużej liczbie zmiennych.

<sup>&</sup>lt;sup>8)</sup> Szybka odwrotna transformacja Fouriera, ang. Inverse Fourier Fast Transformation

### 3.4. Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo jest podstawowym punktem wyjścia dla całej grupy metod symulacyjnych, w których prawdopodobieństwo awarii jest szacowane przy pomocy zbioru wygenerowanych w określony sposób realizacji wektora X, zob. [94].

Klasyczna metoda Monte Carlo polega na generowaniu zgodnie z gęstością danego w rozpatrywanym zagadnieniu rozkładu prawdopodobieństwa  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  zbioru N realizacji  $\mathbf{x}_i$ , a następnie sprawdzeniu czy dana realizacja należy czy też nie należy do obszaru awarii  $\Omega_f$  w celu określenia wartości funkcji charakterystycznej zbioru  $\Omega_f$ 

$$\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \boldsymbol{x} \in \Omega_f \\ 0 & \text{gdy } \boldsymbol{x} \notin \Omega_f \end{cases}$$
(3.46)

Wielkość  $\chi_{\Omega_f}(\mathbf{X})$  jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym

$$\mathbb{P}[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X}) = 1] = \mathbb{P}[\boldsymbol{X} \in \Omega_f] = P_f, \quad \mathbb{P}[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X}) = 0] = \mathbb{P}[\boldsymbol{X} \notin \Omega_f] = 1 - P_f, \quad (3.47)$$

którego wartość średnia oraz wariancja są określone następująco

$$\bar{\chi}_{\Omega_f}(\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X})] = 1 \cdot P_f + 0 \cdot (1 - P_f) = P_f$$
(3.48)

$$\operatorname{Var}\left[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X})\right] = \mathbb{E}\left[(\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X}))^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X})\right]\right)^2 = P_f - P_f^2 = P_f(1 - P_f) . \quad (3.49)$$

Suma realizacji należących do zbioru  $\Omega_f$  w stosunku do liczby N wszystkich realizacji przeprowadzonych podczas analizy umożliwia estymowanie prawdopodobieństwa awarii. Do tego celu jest wykorzystywany estymator wartości średniej funkcji charakterystycznej  $\bar{\chi}_{\Omega_f}(\mathbf{X})$  zbioru  $\Omega_f$ 

$$\widehat{\chi}_{\Omega_f} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X}_k) = \widehat{P}_f , \qquad (3.50)$$

w którym niezależne wektory losowe  $X_k$  są generowane zgodnie z łączną gęstością rozkładu prawdopodobieństwa  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . Kluczowym problemem tej metody jest ilość symulacji N potrzebna do uzyskania zadowalającej dokładności oszacowania  $P_f$ . Miarą błędu popełnianego w metodzie Monte Carlo jest współczynnik zmienności estymatora

$$\nu_{\hat{P}_f} = \frac{\sigma_{\hat{P}_f}}{\overline{\hat{P}}_f} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{NP_f}} , \qquad (3.51)$$

gdzie wartość średnia oraz wariancja estymatora (3.50) dane są następująco

$$\overline{\widehat{P}}_f = \mathbb{E}[\widehat{P}_f] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \overline{\chi}_{\Omega_f}(\boldsymbol{X}_k) = \frac{1}{N} N P_f = P_f$$
(3.52)

$$\sigma_{\hat{P}_f}^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{P}_f] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \mathbb{V}\mathrm{ar}[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X}_k)] = \frac{1}{N^2} N P_f(1 - P_f) = \frac{1}{N} P_f(1 - P_f). \quad (3.53)$$



RYSUNEK 3.7. Graficzna ilustracja idei metody 'Monte Carlo'. Przestrzeń  $\mathcal{U}$ .

Na wartość współczynnika (3.51) wpływa wielkość szacowanego prawdopodobieństwa awarii. Przy jego spodziewanych małych wartościach  $P_f \in (10^{-7} \div 10^{-4})$  oraz akceptowalnej dokładności, czyli wielkości współczynnika zmienności estymatora  $\nu_{\hat{P}_f} = 0.1$ , liczba generowanych symulacji jest znaczna,  $K = 10^6 \div 10^9$ . Ten fakt w zasadzie wyklucza tę metodę z praktycznych zastosowań. Należy nadmienić, że w przypadku zmiennych skorelowanych metoda ta najczęściej jest realizowana w przestrzeni  $\mathcal{U}$ , Rysunek 3.7. Powodem takiego postępowania są własności tej przestrzeni (zmienne są nie skorelowane, Rozdział 3.1.1), z których wypływa możliwość generowania realizacji  $\boldsymbol{u}$  wektora  $\boldsymbol{U}$  zgodnie z gęstością  $\varphi_n(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$  za pomocą tylko jednego generatora liczb losowych.

Bardzo rzadko, w przypadku spotykanych w praktyce inżynierskiej zadań o niewielkim czasie wykonania pojedynczej symulacji, metoda Monte Carlo w jej klasycznej postaci jest stosowana do weryfikacji wyników analizy niezawodności otrzymanych innymi metodami.

### 3.5. Metoda "importance sampling"

"Metoda symulacji według funkcji ważności" (takie tłumaczenie terminu "importance sampling" zaproponowano w pracy [88]) jest znacznie efektywniejsza niż klasyczna metoda Monte Carlo. Efektywność tej metody wynika z idei generowania symulacji według określonej funkcji ważności, czyli nie w całej przestrzeni zdarzeń a jedynie w regionie o największej wartości funkcji łącznej gęstości prawdopodobieństwa awarii, Rysunek 3.8.



RYSUNEK 3.8. Graficzna ilustracja idei metody 'importance sampling', w szczególności jest to ilustracja równania (3.59).

Określenie położenia takiego regionu jest więc bardzo istotne dla metody importance sampling. W praktyce najczęściej wykorzystuje się rozwiązanie metody FORM, które determinuje taki region położeniem punktu projektowego, zob. (3.26). Metoda importance sampling umożliwia poprawę wyników uzyskiwanych przy użyciu metod przybliżonych (FORM/SORM) oraz pozwala na oszacowanie dokładności otrzymanej tymi metodami wartości  $P_f$ , zob. [50, 24].

Istnieje wiele odmian metody importance sampling. Przegląd metod symulacyjnych stosowanych w analizie niezawodności konstrukcji można znaleźć w pracy [77]. W dalszej części rozdziału zostanie przedstawione sformułowanie metody importance sampling w wersji dostępnej w wykorzystywanym w niniejszej pracy pakiecie analizy niezawodności COMREL.

Idea metody jest realizowana poprzez wprowadzenie odpowiednio dobranej funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa  $g_{W}(\cdot)$  w następujący sposób

$$P_f = \mathbb{E}_{\boldsymbol{X}}[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{X})] = \mathbb{E}_{\boldsymbol{W}}\left[\chi_{\Omega_f}(\boldsymbol{W})\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{W})}{g_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{W})}\right],$$
(3.54)

a po transformacji zmiennych X do przestrzeni  $\mathcal{U}$ 

$$P_f = \mathbb{E}_{\boldsymbol{U}}[\chi_{\Delta_f}(\boldsymbol{U})] = \mathbb{E}_{\boldsymbol{W}}\left[\chi_{\Delta_f}(\boldsymbol{W})\frac{\varphi_n(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})}{g_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{W})}\right].$$
(3.55)

W tożsamościach (3.54) i (3.55)  $\chi_{\Omega_f}(\cdot)$  oraz  $\chi_{\Delta_f}(\cdot)$  są funkcjami charakterystycznymi obszarów awarii, odpowiednio, zbiorów  $\Omega_f$  w przestrzeni  $\mathcal{X}$  i po transformacji zbioru  $\Delta_f$ w przestrzeni  $\mathcal{U}$ . Symbol  $\mathbb{E}_{\mathcal{I}}(\cdot)$  oznacza wartość średnią względem rozkładu  $f_{\mathcal{I}}(\cdot)$ . Wykorzystując tożsamość (3.55), estymator prawdopodobieństwa awarii  $\hat{P}_f$  można przedstawić następująco

$$\widehat{P}_f = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \chi_{\Delta_f}(\boldsymbol{W}_k) \frac{\varphi_n(\boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})}{g_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{W}_k)} \,.$$
(3.56)

Wartość powyższego estymatora jest szacowana na podstawie realizacji  $\boldsymbol{w}_k$  wektora  $\boldsymbol{W}_k$  generowanych zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa  $g_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{w})$ . Funkcja  $g_{\boldsymbol{W}}(\cdot)$  powinna spełniać następujące warunki

$$\int_{\Delta_f} g_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{w}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{w} = 1 \,, \qquad (3.57)$$

$$g_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{w}) = \zeta \,\varphi_n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}) \,\chi_{\Delta_f}(\boldsymbol{w}) \,, \quad \zeta \in \mathbb{R} \,. \tag{3.58}$$

Warunek (3.58) powinien obowiązywać w prawie całym obszarze  $\Delta_f$ . Stąd wynika, że funkcja  $g_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{w})$  powinna skupiać większość masy gęstości prawdopodobieństwa wokół punktu o największej wartości funkcji łącznej gęstości prawdopodobieństwa  $\varphi_n(\boldsymbol{w})$ . Naturalne wydaje się więc przyjęcie jako  $g_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{w})$  n wymiarowego rozkładu normalnego o wartości średniej w punkcie projektowym  $\boldsymbol{u}^*$  i jednostkowej macierzy korelacji  $\boldsymbol{I}$ , czyli  $g_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{w}) = \varphi_n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{I})$ . Wtedy estymator prawdopodobieństwa awarii można przedstawić następująco (zob. Rysunek 3.8)

$$\widehat{P}_{f} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \chi_{\Delta_{f}}(\boldsymbol{W}_{k}) \frac{\varphi_{n}(\boldsymbol{W}_{k}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})}{\varphi_{n}(\boldsymbol{W}_{k}, \boldsymbol{u}^{*}, \boldsymbol{I})} .$$
(3.59)

To rozwiązanie pozwala efektywnie szacować  $P_f$  w przypadku istnienia pojedynczego punktu projektowego  $u^*$  oraz postaci powierzchni granicznej znacznie różnej od wielomianu pierwszego lub drugiego stopnia. Koszt estymacji w takim wypadku wynosi kilka tysięcy symulacji. Efektywność estymacji można zmniejszyć poprzez uwzględnienie informacji o kształcie powierzchni granicznej, o ile taka informacja jest dostępna.

Przy założeniu, że powierzchnia graniczna jest wielomianem co najwyżej drugiego stopnia, możliwe jest znaczne zmniejszenie ilości symulacji koniecznych do wystarczająco dobrego oszacowania  $P_f$ . Korzystając z rozwiązań metody SORM, Rozdział 3.3, prawdopodobieństwo awarii można przedstawić w obróconym układzie współrzędnych następująco

$$P_{f} = \mathbb{P}[W_{n} \ge f_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{W}})] = \int_{w_{n} \ge f_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{w}})} \varphi(w_{n})\varphi_{n-1}(\tilde{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{w} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(-f_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{w}}))\varphi_{n-1}(\tilde{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}) \, \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{w}} = \mathbb{E}_{\tilde{\boldsymbol{W}}} \left[ \Phi(-f_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{W}})) \right].$$
(3.60)

Prawdopodobieństwo awarii jest estymowane za pomocą wyrażenia postaci

$$\widehat{P}_{f} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \Phi\left(-f_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k})\right) \frac{\varphi_{n-1}(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})}{g_{\tilde{\boldsymbol{W}}}(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k})} .$$
(3.61)

Tak jak poprzednio przyjęto, że (n-1) wymiarowa funkcja  $g_{\tilde{\boldsymbol{W}}}(\cdot)$  podlega gaussowskiemu rozkładowi prawdopodobieństwa  $g_{\tilde{\boldsymbol{W}}}(\tilde{\boldsymbol{w}}) = \varphi_{n-1}(\tilde{\boldsymbol{w}}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ , w którym  $\boldsymbol{\Sigma} = \lceil \sigma_i \rfloor$  jest diagonalną macierzą odchyleń standardowych umożliwiającą zmianę skupienia realizacji  $\tilde{\boldsymbol{w}}_k$  wokół punktu  $\tilde{\boldsymbol{w}}^* = \mathbf{0}$ . Konsekwentnie, korzystając z rozwiązań metody SORM, można skupić realizacje według parabolicznej aproksymacji funkcji granicznej (3.37). Estymator prawdopodobieństwa awarii (3.61) można przedstawić w postaci

$$\widehat{P}_{f} \approx \widehat{P}_{fs} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \Phi\left(-s_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k})\right) \frac{\varphi_{n-1}(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})}{\varphi_{n-1}(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})} \,.$$
(3.62)

Efektywność tego estymatora można poprawić poprzez zminimalizowanie jego wariancji względem odchyleń standardowych  $\sigma_i$ , zob. [24]

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{1 + \frac{\kappa_i \,\psi(-\beta)}{1 + \kappa_i \upsilon}},\tag{3.63}$$

które są wyrażone przez krzywizny główne  $\kappa_i$ , i = 1, ..., n-1 powierzchni  $w_n = f_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\boldsymbol{w}})$ w punkcie  $\boldsymbol{w}^*$  (zob. (3.38)), a wyrażenie  $\psi(-\beta)$  jest określone związkiem (3.41). Występujący w związku (3.63) parametr v jest zdefiniowany następująco

$$\upsilon = \begin{cases} \beta - \frac{\psi(-\beta)}{\beta} (1+\beta) & \text{dla} & -\frac{1}{\beta} \leqslant \kappa_i < 0\\ 0 & \text{dla} & \kappa_i \geqslant 0 \end{cases}$$
(3.64)

Otrzymany estymator (3.62) jest bardzo efektywny niezależnie od wielkości szacowanego prawdopodobieństwa awarii. W celu uzyskania współczynnika zmienności estymatora mniejszego niż 10% do liczby realizacji potrzebnych do oszacowania SORM należy dodać jedynie kilkadziesiąt symulacji.

## ROZDZIAŁ 4

### Metoda powierzchni odpowiedzi (MPO)

Rozdział zawiera wybrane wiadomości dotyczące metod analizy regresji liniowej, zob. [27], metod planowania eksperymentów, zob. [85, 126], oraz algorytmów łączących te metody w szczególny sposób, zwany Metodą Powierzchni Odpowiedzi (MPO), zob. [81, 82]. W analizie niezawodności MPO umożliwia zastąpienie zwykle niejawnej relacji  $Y = g(\mathbf{X})$ definiującej stan konstrukcji poprzez adekwatną aproksymację  $\hat{Y} = \hat{g}(\mathbf{X})$ , pozwalającą na efektywne szacowanie prawdopodobieństwa awarii konstrukcji. W rozdziale opisano również metody weryfikacji poprawności aproksymacji oraz statystyczny aspekt zagadnienia.

W związku z ogólnością podanych w rozdziale wiadomości opisane metody można stosować zarówno w przestrzeni podstawowych zmiennych losowych  $\mathcal{X}$  jak i w gaussowskiej przestrzeni standardowej  $\mathcal{U}$ .

### 4.1. Liniowa analiza regresji

Termin *Liniowa Analiza Regresji*, choć ogólnie znany, zwykle budzi niepokój. Owa niepewność dotyczy słowa regresja. Słowo to jest historyczną konsekwencją początków poszukiwań związków zawartych w danych zestawieniach liczbowych (por. [27])<sup>1)</sup>. W jego

<sup>&</sup>lt;sup>1)</sup> Odpowiedzialnym za pierwsze użycie słowa *regression* był znany brytyjski antropolog i meteorolog Sir Francis Galton (1822–1911). Pierwotnie użył nawet słowa *reversion* w nie opublikowanym przemówieniu *Typical laws of heredity in man* skierowanym do ROYAL INSTITUTE w 1877 roku. Udokumentowane użycie słowa *regression* pojawia się w jego przemówieniu wygłoszonym w BRITISH ASSOCIATION AT ABERDEEN a opublikowanym w *Nature* oraz w JOURNAL OF THE ANTHROPOLOGICAL INSTITUTE w 1885 roku. W tej drugiej publikacji Galton przedstawił swoje odkrycie.

<sup>(...)</sup> Rozmiar zebranych z plonu ziaren nie dąży do upodobnienia się do rozmiaru ziaren użytych do zasiewu, lecz jest zawsze bardziej średni niż rozmiar ziaren użytych do zasiewu – mniejsze niż ziarna z zasiewu gdy ziarna z zasiewu były duże, większe niż ziarna z zasiewu gdy ziarna z zasiewu były

podstawowym znaczeniu nie obejmuje ono ogółu wiedzy związanej z tym zagadnieniem. Jednak termin ten jest już na trwałe wpisany w tę wciąż rozwijającą się dziedzinę nauki, obejmując coraz szerszą klasę zagadnień.

Podstawową metodą liniowej analizy regresji stosowaną do opracowywania danych (np. zbiór realizacji  $\boldsymbol{x}_i$  wektora  $\boldsymbol{X}$  wraz z odpowiadającym mu zbiorem wartości funkcji granicznej  $y_i = g(\boldsymbol{x}_i)$ ), wyciągania istotnych wniosków co do mogącej istnieć pomiędzy nimi zależności oraz do wyznaczenia zastępczego modelu matematycznego jest *Metoda Najmniejszych Kwadratów* (MNK). Elementarnym przykładem zastosowania MNK jest dobór takiej linii prostej, która najlepiej reprezentuje zależność wiążącą zbiór N punktów ( $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N)$ ) (punkty te mogą być np. wynikiem przeprowadzonego eksperymentu). Takie równanie prostej

$$Y = B_0 + B_1 X + \varepsilon \tag{4.1}$$

musi więc zawierać wielkość  $\varepsilon$  uwzględniającą rozrzut poszczególnych  $y_i$  poza prostą zwaną również linią regresji. Przyjęty model jest wielomianem pierwszego stopnia z funkcjami bazowymi  $X^0 = 1$  i X, a nieznane wielkości  $B_0$  i  $B_1$  są parametrami tego modelu. Równanie (4.1) zostało przyjęte "a priori" z założeniem, że dobrze opisuje badaną zależność. To założenie zawsze powinno być sprawdzone. W przypadku stwierdzenia niezgodności na dalszym etapie analizy należy zmienić model. Liniowość analizy regresji dotyczy liniowości względem nieznanych parametrów (współczynników), a funkcje bazowe mogą być także nieliniowe, np.  $X^2, X^3, sin(X)$  itp. Jak można się domyślić, liczba funkcji bazowych i ich kombinacji jest ogromna. Z drugiej zaś strony liczba parametrów modelu zwykle powinna być znacznie mniejsza niż liczba punktów, na podstawie których szacuje się te parametry.

Na podstawie zbioru N doświadczeń można wyznaczyć estymatory  $b_0, b_1$  nieznanych parametrów  $B_0, B_1$ . Poszukiwane równanie prostej może być przedstawione w następującej postaci

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \,, \tag{4.2}$$

gdzie  $\hat{y}$  oznacza przewidywaną wartość y dla danego x. Zbiór N punktów, których wartości są znane, umożliwia oszacowanie średniego błędu popełnianego podczas korzystania z równania (4.2). Błąd ten powinien być jak najmniejszy. Czyli suma kwadratów odchyleń

$$S = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - B_0 - B_1 x_i)^2$$
(4.3)

powinna mieć wartość minimalną. Estymatory  $b_0, b_1$ wyznacza się z warunków ekstremum funkcji $S(B_0,B_1)$ 

$$\frac{\partial S}{\partial B_0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B_1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^N x_i (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0.$$
(4.4)

małe. Doświadczenie to pokazuje dodatkowo, że średnie cofanie się rozmiaru zebranego z plonu ziarna w kierunku średniej jest wprost proporcjonalne do odchyleń rozmiaru ziarna z zasiewu od średniej. (...)

Po prostych przekształceniach powyższy układ równań przyjmie postać

$$b_0 N + b_1 \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^N x_i + b_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i.$$
(4.5)

Równania te nazywane są *równaniami normalnymi*. Ich rozwiązanie można przedstawić następująco

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} \tag{4.6}$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} , \qquad (4.7)$$

gdzie  $\bar{x}$  i  $\bar{y}$  oznaczają wartości średnie zbiorów, odpowiednio  $(x_1, x_2, ..., x_N)$  oraz  $(y_1, y_2, ..., y_N)$ . Estymowane równanie regresji

$$\hat{y} = \bar{y} + b_1(x - \bar{x}) ,$$
 (4.8)

jest wynikiem podstawienia do (4.2) związku (4.6).

Miarę dokładności z jaką równanie regresji (4.2) estymuje poszukiwaną zależność (4.1) wiążącą zbiór N punktów można wyznaczyć z następującej tożsamości

$$y_i - \hat{y}_i = y_i - \bar{y} - (\hat{y}_i - \bar{y}), \qquad (4.9)$$

obrazującej związek pomiędzy danymi wartościami eksperymentu a wartościami wyznaczonymi za pomocą równania regresji. Powyższe równanie po podniesieniu do kwadratu i przeprowadzeniu sumowania, oraz wykorzystaniu związku

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 , \qquad (4.10)$$

który można udowodnić za pomocą (4.8) i (4.7), prowadzi do następującej zależności

$$\begin{pmatrix} suma \ kwadrat \acute{o}w \\ zmiennej \ poza \ \acute{s}redniq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} suma \ kwadrat \acute{o}w \\ zmiennej \ poza \ regresjq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} suma \ kwadrat \acute{o}w \\ zmiennej \ w \ regresji \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - \bar{y})^2.$$

$$(4.11)$$

Każdej sumie kwadratów odpowiada związana z nią liczba stopni swobody. Liczba ta pokazuje ilość niezależnych informacji zawartych w N niezależnych wartościach  $y_1, y_2, ..., y_N$ , która jest potrzebna do wyznaczenia danej sumy kwadratów. Do wyznaczenia sumy kwadratów zmiennej poza średnią jest potrzebnych (N-1) niezależnych informacji, ponieważ suma wszystkich N wartości jest równa zeru. Tylko jedna funkcja zmiennych  $y_1, y_2, ...y_N$ wystarcza do wyznaczenia sumy kwadratów zmiennej w regresji, mianowicie  $b_1$  (ponieważ  $\sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = b_1^2 \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$ ). Suma ta ma więc tylko jeden stopień swobody. Liczba stopni swobody sumy kwadratów zmiennej poza regresją wynika z równania (4.11) i wynosi (N-2). Podział stopni swobody odpowiadający równaniu (4.11) można przedstawić następująco

$$(N-1) = (N-2) + 1. (4.12)$$

Korzystając z równań (4.11) oraz (4.12) można zestawić prostą tablicę analizy wariancji (ANOVA, ang. Analysis of Variance), zob. [27]:

Źródło	Suma kwadratów	Stopnie	Średni kwadrat
		swobody	
Regresja	$\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = b_1 \left( \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{N} \right)$	1	$MS_R$ SS
Reszta	$\sum (y_i - y_i)^2 = SS$ lub z odejmowania	N-2	$s^2 = \frac{1}{N-2}$
Ogółem	$\sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{N}$	N-1	

TABELA 4.1. Tablica analizy wariancji. Przypadek jednowymiarowy.

Ostatnia kolumna zawiera wielkości powstałe w wyniku podzielenia sumy kwadratów przez odpowiadającą jej liczbę stopni swobody.  $MS_R$  jest to średni kwadrat zmiennej w regresji, a  $s^2$  jest średnim kwadratem zmiennej resztowej ( $e_i = y_i - \hat{y}_i$ ), który jest równocześnie estymatorem wariancji poza regresją otrzymanym przy N - 2 stopniach swobody<sup>2</sup>). Zakładając, że dany model obowiązuje, domyślnie czyni się również pewne założenia dotyczące błędu, które ów model powinien spełniać. Podstawowe założenia odnoszą się do błędów  $\varepsilon_i$  poszczególnych eksperymentów:

- 1.  $\varepsilon_i$  jest zmienną losową o wartości oczekiwanej  $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$  i wariancji  $\mathbb{V}ar[\varepsilon_i] = \sigma^2$
- 2.  $\varepsilon_i \ i \ \varepsilon_j$  są nieskorelowane,  $\mathbb{C}ov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  dla  $i \neq j$
- 3.  $\varepsilon_i$  jest zmienną losową o rozkładzie normalnym  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

W analizie regresji trzecie założenie nie jest konieczne. Przyjmując je, dodatkowo zakłada się, że  $\varepsilon_i$  i  $\varepsilon_j$  są koniecznie niezależne. Na uwagę zasługuje fakt, że w rzeczywistości, w przypadku braku informacji dotyczących rozkładu błędów lub nakładania się błędów z różnych źródeł o różnych rozkładach na końcowy błąd eksperymentu, występuje tendencja do przyjmowania rozkładu normalnego zgodnie z zasadą centralnego twierdzenia granicznego. Badając zmienne resztowe zawsze można sprawdzić obowiązywanie założenia punkt 3.

Jakość równania regresji można ocenić stosując standardowe metody statystyczne (zob. [36]). Analiza regresji bazuje na N realizacjach niezależnych zmiennych losowych  $Y_1, Y_2, ... Y_N$ . Każda funkcja zmiennych losowych jest zmienną losową określoną parame-

<sup>&</sup>lt;sup>2)</sup> SS jest oznaczeniem pochodzącym od skrótu terminu angielskiego (*sum of squares*).

trami rozkładu, a więc estymatory  $b_0, b_1$  są również zmiennymi losowymi. Cechy charakterystyczne ich rozkładów, takie jak wartość średnia czy odchylenie standardowe, nie są znane. Można postawić hipotezę statystyczną, przypuszczenie dotyczące wartości średniej, a następnie ocenić czy ta hipoteza nie jest fałszywa. Jeżeli weryfikacja obejmuje tylko jedna hipoteze, to jest to test poziomu istotności. Poziom istotności to założone z góry krytyczne prawdopodobieństwo, do którego porównuje się prawdopodobieństwo wystąpienia zaobserwowanego zdarzenia, przy założeniu zachodzenia testowanej hipotezy. Hipoteza zostaje odrzucona gdy prawdopodobieństwo jej wystąpienia jest nie większe od prawdopodobieństwa krytycznego. Jeśli jest większe, to znaczy, że na podstawie zaobserwowanego doświadczenia nie ma przesłanek wskazujących na odrzucenie hipotezy. Hipotezę o wartości średniej można testować bez znajomości wartości odchylenia standardowego na podstawie testu t, który opracował Gosset (pseudonim Student)<sup>3)</sup>. Test ten może posłużyć również do oceny prawdopodobieństwa dotyczącego wzajemnego położenia uzyskanego oszacowania wartości średniej (np.  $b_1$ ) i jego prawdziwej wartości (konsekwentnie  $B_1$ ). Przy założonym poziomie ufności – czyli prawdopodobieństwie występowania poszukiwanej wartości parametru rozkładu w pewnym przedziale – można wyznaczyć granice tego przedziału zwanego przedziałem ufności. Przyjmując, że obowiązuje założenie punkt 3., za pomocą kwantylu rozkładu t o (N-2) stopniach swobody można wyznaczyć przedziały ufności poszczególnych parametrów modelu oraz zweryfikować test hipotezy (np. hipotezy zerowej parametru  $B_1, B_{10} = 0$ ) o wartości średniej. Statystyczna ocena równania regresji wymaga dużej liczby eksperymentów. W MPO zaproponowanej w niniejszej pracy ilość eksperymentów jest znacznie ograniczona czasem wykonywania

Analiza zmiennych resztowych umożliwia sprawdzenie czy wstępnie przyjęty model (4.1) jest modelem poprawnym (zob. [27]). W przypadku, gdy postulowany model jest modelem poprawnym, wielkości  $b_i$  stanowią estymatory nieobciążone parametrów  $B_i$  (tzn.  $\mathbb{E}[b_i] = B_i$ ). W przypadku, gdy model nie jest poprawny, estymatory są obciążone (tzn.  $\mathbb{E}[b_i] \neq B_i$ ). Zmienne resztowe zawierają dwa rodzaje błędów. Błąd losowy, który można odnieść do błędu popełnianego podczas wykonywania eksperymentu (np. błąd popełniany w trakcie pomiaru temperatury), nazywany *błędem czystym*, oraz *błąd modelu* (niedopasowania) wynikający z przyjęcia złego modelu matematycznego. Błąd czysty w przypadku analizy numerycznej, czyli obliczeń wykonywanych przy użyciu tego samego oprogramowania i tego samego rodzaju maszyny liczącej oraz przy ustalonych danych wejściowych nie występuje. Zmienne resztowe zawierają w takim przypadku tylko informację o niedopasowaniu modelu. Błąd modelu może być więc utożsamiany ze średnim kwadratem zmiennej resztowej, czyli  $s^2$ . Jeśli wartość  $s^2$  nie jest satysfakcjonująca, czyli obciążenie estymatorów jest zbyt duże, należy zacząć testowanie innego modelu (np. wielomianu wyższego stopnia).

analizy, a tym samym niewystarczająca do wiarygodnego zastosowania statystycznych

metod oceny.

Dodatkową miarą względnego udziału odchylenia tłumaczonego przez regresję w cał-

<sup>&</sup>lt;sup>3)</sup> Testy mogą być przeprowadzane zarówno względem t jak i F (Fischera–Snedecora) przy podobnym argumencie, przy czym  $t^2 = F$ .

kowitym odchyleniu względem średniej jest współczynnik  $R^2$  przyjmujący wartości z przedziału [0,1]:

$$R^{2} = \frac{(\text{SS w regresji})}{(\text{SS poza średnia})} = \frac{\Sigma(\hat{y}_{i} - \bar{y})^{2}}{\Sigma(y_{i} - \bar{y})^{2}}.$$
(4.13)

Innymi słowy,  $R^2$  jest kwadratem współczynnika korelacji wielokrotnej, który jest miarą kwadratu korelacji pomiędzy y i  $\hat{y}$ . Jeśli zaproponowany model idealnie odzwierciedla poszukiwaną zależność to  $R^2 = 1$ . Trzeba jednak sobie zdawać sprawę z tego, że  $R^2$  może przybrać wartość równą jedności poprzez zastosowanie w modelu N odpowiednio wybranych współczynników (N oznacza liczbę eksperymentów), gdyż wtedy można przy-jąć model dobrany dokładnie do danych. W takim przypadku równanie regresji jedynie "łączy" punkty najprawdopodobniej w ogóle nie opisując poszukiwanego odwzorowania.  $R^2$  jest miarą użyteczności danej funkcji bazowej występującej w modelu, oprócz wyrazu wolnego  $b_0$ .

### 4.2. Ogólna postać regresji

Powyższe rozważania, stosując rachunek macierzowy, można rozszerzyć na przypadek wielowymiarowy, w którym argumentem funkcji  $Y = g(\mathbf{X})$  jest n wymiarowy wektor zmiennych losowych  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, ..., X_n]$ . Liniowy model opisujący zależność wiążącą zbiór N punktów w n wymiarowej przestrzeni z odpowiadającym mu zbiorem wartości funkcji  $([\mathbf{x}_1, y_1 = g(\mathbf{x}_1)], [\mathbf{x}_2, y_2 = g(\mathbf{x}_2)], ..., [\mathbf{x}_N, y_N = g(\mathbf{x}_N)])$  można przedstawić w następującej postaci

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\mathbb{X}}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{4.14}$$

gdzie  $\boldsymbol{B}$  jest p elementowym wektorem współczynników liniowych,  $\boldsymbol{Y}$  jest N elementowym wektorem wartości funkcji odpowiadających N realizacjom  $\boldsymbol{x}_i$  wektora  $\boldsymbol{X}$  składającego się z $x_j, j = 1, ..., n$  zmiennych, którego wartości odpowiednich funkcji bazowych zebrane są w  $N \times p$  wymiarowej macierzy  $\mathbb{X}$ . Struktura macierzy  $\mathbb{X}$  jest wyjaśniona w następnym podrozdziale (por. rozdział 4.3).  $\boldsymbol{\varepsilon}$  jest N elementowym wektorem błędów odpowiadających poszczególnym realizacjom.

W liniowej analizie regresji zakłada się analogicznie, że  $\varepsilon$  jest wektorem zmiennych losowych o wartościach oczekiwanych  $\mathbb{E}[\varepsilon] = \mathbf{0}$  i nieznanych wariancjach  $\mathbb{V}ar[\varepsilon] = diag[\mathbf{I}\sigma^2]$ oraz, że elementy  $\varepsilon$  są nieskorelowane. Konsekwencją założenia  $\mathbb{E}[\varepsilon] = \mathbf{0}$  jest  $\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = \mathbb{X}\mathbf{B}$ . Suma kwadratów błędów wynosi

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mathbb{X}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mathbb{X}}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} - 2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathbb{X}}\boldsymbol{B}.$$
(4.15)

Zastosowanie MNK pozwala na wyznaczenie wartości estymatora  $\boldsymbol{B}$  minimalizującego powyższą sumę kwadratów błędów. Można to uzasadnić różniczkując powyższe równanie oddzielnie względem każdego  $B_i$  i przyrównując powstałe wyrażenia do zera, jednocześnie zastępując nieznane współczynniki  $\boldsymbol{B}$  przez ich estymatory  $\boldsymbol{b}$ . Powstały w ten sposób układ równań normalnych jest następującej postaci

$$(\mathbb{X}^{\mathrm{T}}\mathbb{X})\boldsymbol{b} = \mathbb{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}.$$
(4.16)

W przypadku istnienia p niezależnych równań macierz  $(\mathbb{X}^T\mathbb{X})_{p\times p}$  tego układu jest nieosobliwa i istnieje jej odwrotność. Wtedy można zastosować standardowe rozwiązanie układu równań normalnych

$$\boldsymbol{b} = (\mathbb{X}^{\mathrm{T}}\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$$
(4.17)

dowolną ze znanych metod rozwiązywania układów równań, np. metodę eliminacji Gaussa. Jeśli jest to układ równań zależnych to macierz  $\mathbb{X}^T \mathbb{X}$  jest osobliwa, a jej odwrotność nie istnieje. Może również zdarzyć się sytuacja, w której macierz  $\mathbb{X}^T \mathbb{X}$  jest bliska osobliwości, np. ze względu na złe uwarunkowanie. W obu przypadkach można zredukować liczbę parametrów  $B_i$  definiujących model poprzez eliminację parametrów powodujących osobliwość. Tym samym następuje zmiana pierwotnie przyjętego modelu.

Metoda SVD (ang. *singular value decomposition* por. [87]) umożliwia identyfikację i eliminację parametrów odpowiedzialnych za osobliwość. Rozwiązanie zadania najmniejszych kwadratów (4.14) metodą SVD można przedstawić następująco

znaleźć takie 
$$\boldsymbol{B}$$
, które minimalizuje  $|X\boldsymbol{B} - \boldsymbol{Y}|^2$ . (4.18)

Metoda bazuje na dekompozycji macierzy  $\mathbb{X}_{N \times p}$  na iloczyn trzech macierzy. Dwie skrajne  $\mathbb{U}_{N \times p}$ ,  $\mathbb{V}_{p \times p}$  są ortogonalne (składają się z kolumn ortonormalnych), a trzecia  $\mathbb{W}_{p \times p}$ , diagonalna, pozwala na identyfikację parametrów powodujących osobliwość

$$\mathbb{X} = \mathbb{U}\mathbb{W}\mathbb{V}^{\mathrm{T}} = \mathbb{U}[diag(w_i)]\mathbb{V}^{\mathrm{T}}.$$
(4.19)

W przypadku kwadratowej macierzy X, odwrotność powyższego iloczynu można łatwo otrzymać, wykorzystując własności macierzy ortogonalnych (transpozycja macierzy ortogonalnej jest równa jej odwrotności). W przypadku większej liczby równań niż niewiadomych, z jakim zwykle ma się do czynienia w MNK, rozwiązanie jest tej samej postaci. Zastępując nieznane parametry  $\boldsymbol{B}$  poprzez ich estymatory  $\boldsymbol{b}$  rozwiązanie metodą SVD można przedstawić następująco:

$$\boldsymbol{b} = (\mathbb{V}^{\mathrm{T}})^{-1} \mathbb{W}^{-1} \mathbb{U}^{-1} \boldsymbol{Y} = \mathbb{V}[diag(1/w_i)] \mathbb{U}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}.$$
(4.20)

Eliminacja parametru  $b_i$  odbywa się poprzez zastąpienie *i*-tego wyrazu w macierzy diagonalnej W, jeśli jest równy zeru lub bliski zera, przez zero w odwróconej macierzy diagonalnej [ $diag(1/w_j)$ ]. Rozwiązanie, w przypadku gdy liczba niezależnych równań jest większa od liczby niewiadomych, jest identyczne z najlepszą aproksymacją w sensie błędu średniokwadratowego. W sytuacji gdy współczynniki odpowiadające równaniom zależnym są eliminowane to rozwiązanie, gdy układ jest wciąż nadokreślony, jest dalej identyczne z najlepszą aproksymacją w sensie błędu średniokwadratowego lecz teraz już zredukowanego modelu. Metoda SVD pozwala również na otrzymanie rozwiązania w przypadku, gdy układ jest niedookreślony (rozwiązanie ogólne układu równań). Algorytm MPO raczej wyklucza wystąpienie takiego przypadku.

Rozwiązanie MNK ogólnej postaci regresji (4.17) posiada szereg istotnych własności. Niezależnie od własności dowolnego rozkładu błędów minimalizuje sumę kwadratów  $\varepsilon^{T}\varepsilon$ . Elementy wektora **b** stanowią estymatory nieobciążone elementów wektora **B** o najmniejszych wariancjach ale tylko wtedy, gdy postulowany model jest modelem poprawnym (tzn.  $\mathbb{E}[b] = B$ ). Znalezienie poprawnego modelu w przypadku nieznanej i skomplikowanej relacji jest raczej niemożliwe. W dążeniu do satysfakcjonującej aproksymacji zawsze istnieje kompromis pomiędzy dwoma skrajnościami. Z jednej strony koszty związane z uzyskaniem informacji sugerują jak najmniejszą liczbę funkcji bazowych (współczynników  $b_i, i = 1, ..., p$ ) tworzących równanie regresji. Z drugiej, jakość aproksymacji, jej wiarygodność wskazują na użycie jak największej liczby współczynników (odpowiednio większa liczba eksperymentów). Rozpatrywany w MPO model nie jest więc z założenia poprawny a jego estymatory są obciążone. Na wielkość obciążenia współczynników, oprócz różnicy pomiędzy postulowanym a rzeczywistym modelem, wpływa również wybór realizacji  $x_i$ tworzących zbiór danych, na których rozpięta jest aproksymacja. Świadomie zaprojektowany zbiór realizacji nosi nazwę planu eksperymentów (por. rozdział 4.3). W ogólności nie ma procedury statystycznej prowadzącej do uzyskania najlepszego rozwiązania, a na ostateczny wybór największy wpływ ma własny osąd. Istniejące przesłanki ułatwiające wybór postaci równania regresji (czyli np. stopnia wielomianu czy też rodzaju członów mieszanych) oraz odpowiedni plan eksperymentów, mogą znacznie zmniejszyć liczbę wykonywanych eksperymentów. Nawet w tak niedoskonałej z punktu widzenia poprawności modelu metodzie, istnieje szereg procedur poszukiwania 'najlepszego' równania regresji (por. [27]), czyli wyznaczenie podzbioru takich funkcji bazowych z założonego 'a priori' zbioru (np. zbiór  $[1, X_i, X_iX_j, i, j = 1, ..., n]$ ), który najlepiej opisuje badaną zależność. Przeważnie kryterium oceny jakości równania regresji stanowi test t lub F. Podstawową, a zarazem wymagającą największych nakładów obliczeniowych jest metoda wszystkich możliwych regresji. W tej procedurze wybór najlepszego równania regresji przeprowadzany jest przy pomocy uogólnienia wielkości  $R^2$ . W ogólnej postaci regresji jest to kwadrat współczynnika korelacji wielokrotnej (ang. square of the multiple correlation coefficient) inaczej nazywany współczynnikiem determinacji wielokrotnej (ang. coefficient of multiple determination) zdefiniowany tą samą formulą (4.13).

Usprawiedliwienie stosowania MNK wynika z przyjętych założeń. Jeżeli błędy są niezależne i podlegają rozkładowi normalnemu  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ , **b** stanowi najbardziej wiarygodny estymator **B** (czyli  $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}\sigma^2), \varepsilon$  podlega *n* wymiarowemu rozkładowi normalnemu,  $\mathbb{E}[\varepsilon] = \mathbf{0}$  i  $\mathbb{V}ar[\varepsilon] = diag[\mathbf{I}\sigma^2]$ ), to funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych  $Y_1, Y_2, ...Y_N$  (por. (3.5)) można przedstawić w postaci iloczynu

$$f_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left[\frac{-\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma^n(2\pi)^{n/2}} \exp\left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}}{2\sigma^2}\right].$$
 (4.21)

Przy ustalonej wartości  $\sigma$  maksymalizacja funkcji  $f_{\varepsilon}(\varepsilon)$  jest równoważna minimalizacji wielkości  $\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$ . W MPO nie ma żadnych przesłanek aby przyjąć jakikolwiek rozkład błędów. Powodem jest mała liczba eksperymentów w stosunku do liczby współczynników modelu oraz w większości przypadków brak przesłanek co do rzeczywistej postaci modelu matematycznego. Tym niemniej, MNK umożliwia wyznaczenie współczynników **b** minimalizujących sumę  $\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$ .

Podstawowe wielkości charakteryzujące ogólne równanie regresji zebrano w tablicy 4.2 analizy wariancji (ANOVA), która jest uogólnieniem jednowymiarowego przypadku (Tabela 4.1). Suma kwadratów  $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \mathbb{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}$  jest sumą dwóch wyrażeń, sumy kwadratów w regresji

Źródło	Suma kwadratów	Stopnie swobody	Średni kwadrat
Regresja	$oldsymbol{b}^{ ext{T}} oldsymbol{X}^{ ext{T}} oldsymbol{Y}$	p	$\mathrm{MS}_R = (oldsymbol{b}^\mathrm{T} \mathbb{X}^\mathrm{T} oldsymbol{Y})/p$
Reszta	$oldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}oldsymbol{Y} - oldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathbb{X}^{\mathrm{T}}oldsymbol{Y}$	N- $p$	$s^2 = (\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathbb{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y})/(N-p)$
Ogółem	$oldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}oldsymbol{Y}$	N	

TABELA 4.2. Tablica analizy wariancji

 $\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ oraz poprawki centrującej względem średniej  $(\sum y_i)^2/N$ . Stąd liczba niezależnych informacji zawartych w tej sumie jest równa liczbie współczynników p. Z powodu braku błędu czystego  $s^2$  jest zarazem błędem modelu.

Szczególne zastosowanie analizy regresji w niniejszej pracy wymaga zastosowania metody najmniejszej sumy ważonej kwadratów (wyprowadzenie układu równań normalnych tej metody można znaleźć w pracy Drapera i Smitha [27]). Metoda ta, bazująca na rozwiązaniu MNK, pozwala uwzględnić wpływ ważności eksperymentów w wyznaczaniu kształtu końcowej aproksymacji. Taki zabieg zwykle jest stosowany przy braku zaufania do wybranych wyników eksperymentów, co przekłada się na przyjęcie różnych wartości wariancji błędów popełnianych podczas wykonywania eksperymentów. Idea metody polega na transformacji wyników eksperymentów  $\boldsymbol{Y}$  na takie zmienne  $\boldsymbol{Z}$ , które spełniają podstawowe założenia MNK ( $\boldsymbol{Z} = \mathbb{Q}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}, \mathbb{E}[\boldsymbol{f}] = \boldsymbol{0}, \mathbb{V}\mathrm{ar}[\boldsymbol{f}] = diag[\boldsymbol{I}\sigma^2]$ ), a następnie zastosowaniu standardowej procedury MNK. Poszukiwany wektor estymatorów  $\boldsymbol{b}$  można wtedy ponownie wyrazić za pomocą pierwotnych danych  $\boldsymbol{Y}$ . Rozwiązanie układu równań normalnych (4.17) ulega następującej modyfikacji

$$\boldsymbol{b} = (\mathbb{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{Y}, \qquad (4.22)$$

gdzie V jest  $N \times N$  wymiarową macierzą wariancji. Gdy eksperymenty są niezależne, to macierz V jest diagonalna, a jej odwrotność tworzy macierz wagową

$$\mathbf{V}^{-1} = diag \left[ w_1, w_2, ..., w_n \right]. \tag{4.23}$$

W MPO różnicowanie wariancji błędów symulacji komputerowych jest zabiegiem sztucznym, mającym na celu uzyskanie adekwatnej aproksymacji funkcji granicznej w otoczeniu punktu o największej wartości funkcji łącznej gęstości prawdopodobieństwa odpowiadającego awarii.

Skrócenie czasu samej analizy regresji, a także lepszą dokładność obliczeń przy estymacji współczynników modelu, można uzyskać poprzez zastosowanie jako funkcji bazowych wielomianów ortogonalnych q-tego stopnia. W przypadku jednej zmiennej funkcje bazowe  $(p_1(X) = X, p_2(X) = X^2, ..., p_q(X) = X^q)$  określają model w następująco

$$y_i = B_0 + B_1 p_1(x_i) + B_2 p_2(x_i) + \dots + B_q p_q(x_i) + \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \dots, N), \qquad (4.24)$$

gdzie N > q, a eksperymenty  $x_1, x_2, ..., x_N$  są zaplanowane w równych odstępach d od

siebie. Wielomiany te mają następujące własności

$$\sum_{i=1}^{N} p_j(x_i) = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., q)$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_j(x_i) p_k(x_i) = 0 \qquad (j, k = 1, 2, ..., q; j \neq k) \qquad (4.25)$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_j^2(x_i) \neq 0 \qquad (j = 1, 2, ..., q).$$

Macierz X ogólnej postaci regresji można więc przedstawić następująco

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_q(x_1) \\ 1 & p_1(x_2) & p_2(x_2) & \dots & p_q(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & p_1(x_N) & p_2(x_N) & \dots & p_q(x_N) \end{bmatrix}.$$
(4.26)

Rozwiązanie MNK (4.17) modelu (4.24), którego funkcje bazowe są wielomianami ortogonalnymi znacznie się upraszcza. Znika problem związany z wyznaczeniem macierzy odwrotnej  $(X^TX)^{-1}$  ponieważ iloczyn

$$\mathbb{X}^{\mathrm{T}}\mathbb{X} = diag\left[N, \sum_{i=1}^{N} p_{1}^{2}(x_{i}), \sum_{i=1}^{N} p_{2}^{2}(x_{i}), \dots, \sum_{i=1}^{N} p_{q}^{2}(x_{i})\right]$$
(4.27)

generuje macierz diagonalną. Postać pierwszych dwóch wielomianów jest następująca

$$p_1(X) = \left[\frac{X - \bar{X}}{d}\right], \qquad p_2(X) = \left[\left(\frac{X - \bar{X}}{d}\right)^2 - \left(\frac{N^2 - 1}{12}\right)\right], \qquad (4.28)$$

gdzie  $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{N} x_i)/N$ . Diagonalną postać powyższego iloczynu można również uzyskać planując odpowiednio eksperymenty (zob. rozdział 4.3).

W MPO przyjęto model którego funkcje bazowe matematyczny, wielomianami co najwyżej drugiego stopnia  $\mathbf{Z}$ członami mieszanymi są  $(1, X_i, X_i, X_j, i, j = 1, ..., n)$ . Model zawierający wszystkie składowe wektora  $\boldsymbol{B} = [B_0, B_1, ..., B_n, B_{12}, ..., B_{(n-1)n}, B_{11}, ..., B_{nn}]$  w liczbie  $p = (n^2 + 3n + 2)/2$  można przedstawić następująco

$$Y = B_0 + \sum_{i=1}^n B_i X_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1+i}^n B_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n B_{ii} X_i^2 + \varepsilon.$$
(4.29)

W prezentowanej pracy wykorzystywane są również modele prostsze, w których zakłada się, że część składowych wektora B ma wartości zerowe.

### 4.3. Planowanie eksperymentów

Wiadomości wykorzystane w niniejszej pracy zawarte w tym podrozdziale są częścią szerszego działu związanego z metodyką badań doświadczalnych (por. [85]). Teoria ta, opracowana w celu wyznaczenia zależności funkcyjnej między wielkościami charakteryzującymi obiekt badań (zbiór z danymi), łączy trzy następujące zagadnienia:

- modelowanie matematyczne obiektów badań,
- planowanie (programowanie) doświadczeń (eksperymentów),
- analizę wyników.

Jeżeli istniejące przesłanki pozwalają przyjąć 'a priori' model matematyczny, to odpowiadający mu plan doświadczeń powinien być tak zaprogramowany, żeby równocześnie zapewniać najlepsze wykorzystanie informacji zawartej w uzyskanych danych oraz umożliwiać łatwą analizę wyników. Jeśli model matematyczny nie jest znany, to dobrze zaprogramowany plan doświadczeń powinien dopuszczać możliwość uzupełnienia go dodatkowym planem eksperymentów oraz modyfikację modelu matematycznego. Należy zaznaczyć, że plan doświadczeń powinien być dostosowany do danego modelu matematycznego.

Istnieje szereg opracowanych metod planowania doświadczeń, pozwalających uzyskać w optymalny sposób interesującą badacza informację (zob. [126]). Użyte w pracy metody można sklasyfikować jako plany eksperymentów statycznych zdeterminowanych (por. [85]). Do tej klasy należą plany kompletne dwuwartościowe i trójwartościowe (nazywane również planami czynnikowymi [126], ang. *factorial design*). Tak zaprojektowany plan eksperymentów zawiera każdą możliwą kombinację wartości (ustalonych przez badacza realizacji każdej zmiennej, przy czym każda zmienna ma taką samą liczbę realizacji) wszystkich zmiennych  $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ . Pozwala on szacować efekt zmiany wartości jednej zmiennej niezależnie od pozostałych. Inną ważną zaletą planów czynnikowych jest możliwość uwzględnienia łącznego wpływu dwóch zmiennych w równaniu regresji. Plany eksperymentów przedstawione poniżej dotyczą zadań, w których równanie regresji jest wielomianem co najwyżej drugiego stopnia.

Zaplanowany zbiór doświadczeń, który określa dany plan eksperymentów, wygodnie jest przedstawić za pomocą macierzy

$$\mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \cdots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1N} & \xi_{2N} & \cdots & \xi_{nN} \end{bmatrix},$$
(4.30)

nazywanej macierzą projektową. Macierz ta składa się więc z N realizacji wektora zmiennych, a pojedyncze *i*-te zaplanowane doświadczenie reprezentuje *i*-ty wiersz  $[\xi_{1i} \xi_{2i} \cdots \xi_{ni}]$  macierzy.

Podstawowymi planami eksperymentów czynnikowych są plany kompletne dwuwartościowe. Plan ten zakłada tylko dwie realizacje każdej z n zmiennych (liczba kombinacji  $N = 2^n$ ). W przypadku trzech zmiennych (liczba eksperymentów  $N = 2^3$ ), gdy każda ze zmiennych przyjmuje dwie wartości, mniejszą  $\xi_i^-$  i większą  $\xi_i^+$ , wszystkie możliwe kombinacje można przedstawić następująco

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} \xi_1^- & \xi_2^- & \xi_3^- \\ \xi_1^+ & \xi_2^- & \xi_3^- \\ \xi_1^- & \xi_2^+ & \xi_3^- \\ \xi_1^- & \xi_2^- & \xi_3^+ \\ \xi_1^- & \xi_2^+ & \xi_2^+ \\ \xi_1^+ & \xi_2^- & \xi_2^+ \\ \xi_1^+ & \xi_2^+ & \xi_3^- \\ \xi_1^+ & \xi_2^+ & \xi_2^+. \end{bmatrix} , \qquad (4.31)$$

Macierz projektową można przetransformować według następującego wzoru

$$x_i = 2\left(\frac{\xi_i - \bar{\xi}_i}{d_i}\right), \qquad (4.32)$$

gdzie  $d_i = \xi_i^+ - \xi_i^-$  oraz  $\bar{\xi}_i = (\xi_i^+ + \xi_i^-)/2$ , a  $\xi_i$  jest mniejszą (większą) wartością *i*-tej zmiennej. Ta operacja, która mniejszej wartości  $\xi_i^-$  zmiennej przypisuje liczbę -1, a większej  $\xi_i^+$  liczbę 1, pozwala na wygodne i efektywne numerycznie przedstawienie macierzy projektowej. Powyższa macierz będzie zawierać teraz jedynie liczby całkowite

$$X_{1} \quad X_{2} \quad X_{3}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
(4.33)

Tego typu plan eksperymentów może posłużyć do estymowania modelu liniowego, ponieważ dostępne są tylko dwie wartości każdej zmiennej. Kolejna modyfikacja macierzy projektowej jest związana z uwzględnieniem wyrazu wolnego. Przy standardowych założeniach dotyczących błędu, liniowy model można przedstawić następująco

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + \varepsilon.$$
(4.34)

Wyrazowi wolnemu odpowiada dodatkowa kolumna w macierzy projektowej

Kolumny tej macierzy tworzą wektory do siebie prostopadłe. Ta własność implikuje diagonalność macierzy

$$\mathbb{X}^T \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 8 & & \\ & 8 & \\ & & 8 \\ & & & 8 \end{bmatrix}.$$
(4.36)

Dlatego też estymatory  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  oraz  $b_3$  odpowiadają elementom macierzy  $\mathbb{X}^T \mathbf{Y}$  podzielonym przez 8 (por. 4.17). Specyfika takiego planu eksperymentów powoduje również, że współczynniki regresji nie są skorelowane

$$\mathbb{C}\operatorname{ov} \boldsymbol{b} = \mathbb{C}\operatorname{ov} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \sigma^2 \left( \mathbb{X}^T \mathbb{X} \right)^{-1} = \left( \sigma^2 / 8 \right) \boldsymbol{I}.$$
(4.37)

Plany kompletne dwuwartościowe należą do szerszej klasy tak zwanych *planów ortogonal nych.* Tego rodzaju plany mogą implikować diagonalność iloczynu  $\mathbb{X}^T \mathbb{X}$ , a co się z tym wiąże, współczynniki modelu bazującego na takim planie nie są skorelowane.

Plany kompletne dwuwartościowe mogą być również użyte w przypadku, gdy model liniowy zawiera człony mieszane  $B_{ij}X_iX_j, i \neq j$ . W przypadku trzech zmiennych ( $N = 2^3$ ), zredukowany model (4.29) z wyrazem wolnym oraz z członami liniowymi i mieszanymi

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + B_{12} X_1 X_2 + B_{13} X_1 X_3 + B_{23} X_2 X_3 + \varepsilon$$
(4.38)

reprezentuje następująca macierz projektowa

gdzie plan eksperymentów opisują kolejne wiersze odpowiadające kolumnom  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ . Kolumny tej macierzy tworzą wektory do siebie prostopadłe, czyli macierz  $\mathbb{X}^T \mathbb{X}$  jest diagonalna. Interpretację graficzną planu kompletnego dwuwartościowego dla trzech zmiennych przedstawia Rysunek 4.1.



RYSUNEK 4.1. Plan eksperymentu  $N = 2^n$ , n = 3.

W przypadku trzech równoodległych od siebie realizacji każdej z n zmiennych  $[\xi_i^-, \xi_i^0, \xi_i^+]$  (liczba kombinacji  $N = 3^n$ ) można użyć tej samej transformacji (4.32), przy czym realizacji środkowej  $\xi_i^0$  jest przypisana liczba 0. Pozostałe wielkości są zdefiniowane analogicznie  $d_i = \xi_i^+ - \xi_i^-$  a  $\bar{X}_i = (\xi_i^+ + \xi_i^0 + \xi_i^-)/3$ . Dla dwóch zmiennych zredukowany model (4.29) po modyfikacji zapewniającej diagonalność iloczynu  $\mathbb{X}^T\mathbb{X}$  przyjmuje następującą postać

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_{12} X_1 X_2 + B_{11} (X_1^2 - \bar{X}_1^2) + B_{22} (X_2^2 - \bar{X}_2^2) + \varepsilon, \qquad (4.40)$$

która implikuje stosowną modyfikację macierzy projektowej

		$X_1$	$X_2$	$X_1^2 - \bar{X}_1^2$	$X_2^2 - \bar{X}_2^2$	$X_1X_2$	2
	1	-1	-1	1/3	1/3	1	]
	1	-1	0	1/3	-2/3	1	
	1	-1	1	1/3	1/3	1	
	1	0	-1	-2/3	1/3	1	
$\mathbb{X} =$	1	0	0	-2/3	-2/3	1	, (4.41)
	1	0	1	-2/3	1/3	1	
	1	1	-1	1/3	1/3	1	
	1	1	0	1/3	-2/3	1	
	1	1	1	1/3	1/3	1	

gdzie  $\bar{X}_i^2$  jest średnią wartością zmiennej  $X_i^2$ . Kolejne wiersze odpowiadające kolumnom  $X_1, X_2$  opisują plan eksperymentów. Plan czynnikowy trójwartościowy umożliwia użycie pełnego modelu wielomianu drugiego stopnia. Podstawową przeszkodą w jego praktycznym zastosowaniu jest znaczny wzrost liczby kombinacji wraz ze wzrostem liczby zmiennych. Analiza jedynie trzech zmiennych wymaga przeprowadzenia aż 27 eksperymentów, co najlepiej ilustruje Rysunek 4.2.



RYSUNEK 4.2. Plan eksperymentu  $N = 3^n$ , n = 3.

Planem eksperymentów wykorzystującym zalety eksperymentu czynnikowego dwuwartościowego oraz umożliwiającym uwzględnienie członów kwadratowych jest plan statyczny zdeterminowany poliselekcyjny (wieloczynnikowy) (ang. *CCD, Central Composite Design*). CCD jest planem czynnikowym dwuwartościowym, poszerzonym o plan eksperymentów osiowych, które opisuje macierz

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\Delta & 0 & \dots & 0 \\ \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\Delta & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\Delta \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{bmatrix},$$
(4.42)

gdzie  $\Delta$  jest ustaloną przez eksperymentatora odległością od początku układu współrzędnych. Interpretację graficzną planu eksperymentów osiowych dla trzech zmiennych przedstawia Rysunek 4.3. Model (4.29) w przypadku trzech zmiennych, po modyfikacji



RYSUNEK 4.3. Plan eksperymentu osiowego, n = 3.

analogicznej do przeprowadzonej w przypadku planu czynnikowego trójwartościowego, można przedstawić następująco

$$Y = B_0 + \sum_{i=1}^3 B_i X_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1+i}^3 B_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^3 B_{ii} (X_i^2 - \bar{X}_i^2) + \varepsilon.$$
(4.43)

Odpowiadająca temu modelowi macierz projektowa, po transformacji  $\left( 4.32\right)$ zmiennych, przyjmuje postać

	$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_{11}$	$B_{22}$	$B_{33}$	$B_{12}$	$B_{13}$	$B_{23}$	
		$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1^2 - \bar{X}_1^2$	$X_2^2 - \bar{X}_2^2$	$X_3^2 - \bar{X}_3^2$	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	
Г	1	-1	-1	-1	1 - c	1 - c	1 - c	1	1	1]	
	1	-1	-1	1	1 - c	1 - c	1 - c	1	-1	-1	
	1	-1	1	-1	1 - c	1 - c	1 - c	-1	1	-1	
	1	-1	1	1	1 - c	1 - c	1 - c	-1	-1	1	
	1	1	-1	-1	1 - c	1 - c	1 - c	-1	-1	1	
	1	1	-1	1	1 - c	1 - c	1 - c	-1	1	-1	
$\mathbb{X} =$	1	1	1	-1	1 - c	1 - c	1 - c	1	-1	-1	
	1	1	1	1	1 - c	1 - c	1 - c	1	1	1	, (4.44)
	1	0	0	0	-c	-c	-c	0	0	0	
	1	$-\Delta$	0	0	$\Delta^2 - c$	-c	-c	0	0	0	
	1	$\Delta$	0	0	$\Delta^2 - c$	-c	-c	0	0	0	
	1	0	$-\Delta$	0	-c	$\Delta^2 - c$	-c	0	0	0	
	1	0	$\Delta$	0	-c	$\Delta^2 - c$	-c	0	0	0	
	1	0	0	$-\Delta$	-c	-c	$\Delta^2 - c$	0	0	0	
	1	0	0	$\Delta$	-c	-c	$\Delta^2 - c$	0	0	0	

gdzie  $c = (2^n + 2\Delta^2)/(2^n + 2n + 1)$ , a kolejne wiersze odpowiadające kolumnom  $X_1, X_2, X_3$ opisują plan eksperymentów widoczny na Rysunku 4.4 (liczba eksperymentów  $N = 2^n + 2n + 1$ ). Macierz X<sup>T</sup>X w ogólności nie jest diagonalna



RYSUNEK 4.4. Plan eksperymentu CCD, n = 3.

 $B_3$  $B_{11}$  $B_{33}$   $B_{12}$   $B_{13}$   $B_{23}$  $B_0$  $B_1$  $B_2$  $B_{22}$ 15 $8 + 2\Delta^2$  $8+2\Delta^2$  $8+2\Delta^2$ qq $\mathbb{X} =$ (4.45)rqr8

Jej część odpowiadająca współczynnikom  $B_{ii}$  tworzy symetryczną macierz o wymiarze  $n \times n$ , która zawiera równe sobie niezerowe człony pozadiagonalne  $q = (2^n(2n+1) - 4\Delta^2 2^n - 4\Delta^4)/(2^n + 2n + 1)$ . Spełnienie warunku q = 0 zapewnia ortogonalność planu CCD, co z drugiej strony ustala wartość  $\Delta$  przy zadanym n (tabl. 4.3). Narzucony ortogonalnością CCD warunek nie zawsze jest akceptowalny, a utrudnie-

n	2	3	4	5	6	7	8
$\Delta$	1.000	1.216	1.414	1.596	1.761	1.910	2.045

TABELA 4.3. Tablica wartości $\Delta$ ortogonalnego planu CCD

nia wynikające z odwrócenia stosunkowo niewielkiej części macierzy (4.45) obecnie nie stanowią problemu rachunkowego.

Przedstawione powyżej plany eksperymentów oraz podstawowa analiza regresji, zostały zaimplementowane w komercyjnym programie analizy niezawodności COMREL, zintegrowanym z kodem elementów skończonych PERMAS. Połączenie tych dwóch programów oraz możliwość równoległego przeprowadzania obliczeń pozwala na efektywne projektowanie złożonych zagadnień inżynierskich. Praca została wykonana w ramach międzynarodowego projektu europejskiego ASRA–HPC<sup>4</sup>. Plany eksperymentów stanowią bazę MPO do poszukiwania aproksymacji funkcji granicznej  $\hat{Y} = \hat{g}(X)$  w gaussowskiej przestrzeni standardowej  $\mathcal{U}$  oraz w oryginalnej przestrzeni zmiennych losowych  $\mathcal{X}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>4)</sup> The European Community ESPRIT IV/HPCN Simulation and Design Project No. 28159, Domain 6, Task 6.18, *Advanced Structural Reliability Analysis on High Performance Computers* (ASRA–HPC), coordinated by INTES (PERMAS), Stuttgart, Germany.

# ROZDZIAŁ 5

### Wybrane algorytmy analizy niezawodności przy użyciu MPO

Rozdział zawiera opis przedstawiający chronologiczny rozwój koncepcji metody powierzchni odpowiedzi, analizę przeprowadzonych testów oraz wyniki analizy niezawodności rzeczywistych konstrukcji. Przyjęta koncepcja bazuje na znalezieniu takiej aproksymacji  $\hat{G}(\boldsymbol{U})$  funkcji granicznej  $G(\boldsymbol{U})$ , która dawałaby reprezentatywną postać powierzchni granicznej  $\hat{G}(\boldsymbol{U}) = 0$  w otoczeniu punktu projektowego, za pomocą jak najmniejszej liczby symulacji. Własności przestrzeni  $\mathcal{U}$  oraz przyjęta koncepcja narzuciły szereg dodatkowych rozwiązań, które istotnie wpływają na wynik analizy.

### 5.1. Algorytm MPO

Zaproponowana w niniejszej pracy MPO bazuje na klasycznych już algorytmach analizy niezawodności FORM oraz SORM (zob. rozdział 3) oraz na ogólnych ideach zawartych w pracy Rackwitza [91]. Tak jak we wspomnianych metodach prezentowany algorytm MPO jest realizowany w gaussowskiej przestrzeni standardowej  $\mathcal{U}$ . MPO można podzielić na dwa etapy:

- I. poszukiwanie punktu centralnego ta część bazuje na procedurze optymalizacyjnej RF (zob. (3.26));
- II. zaplanowanie i wykonanie dodatkowego zbioru eksperymentów (bez lub ze zbiorem wybranych eksperymentów z pierwszego etapu) oraz wagowej aproksymacji funkcji granicznej wielomianem pierwszego lub drugiego stopnia w otoczeniu punktu centralnego.

Wynikiem I etapu MPO jest wstępne oszacowanie położenia punktu projektowego. Ponieważ punkt projektowy jest dokładnie zdefiniowany, zob. rozdział 3.1.3, każde oszacowanie położenia  $\boldsymbol{u}^*$  w przestrzeni  $\mathcal{U}$  (analogicznie  $\boldsymbol{x}^*$  w przestrzeni  $\mathcal{X}$ ) zostało nazwane punktem centralnym  $\boldsymbol{u}_c$  ( $\boldsymbol{x}_c$ ). Na I etapie, w otoczeniu punktu centralnego dana jest również wstępna aproksymacja funkcji granicznej  $G(\boldsymbol{U})$  hiperpłaszczyzną. Dane te, w wielu przypadkach pozwalają na wystarczająco dobre oszacowanie  $P_f$ . Rezultatem II etapu jest aproksymacja  $G(\boldsymbol{U})$  wielomianem pierwszego lub drugiego stopnia. Wykorzystując zamiast niejawnej i kosztownej obliczeniowo funkcji  $G(\boldsymbol{U})$  jej aproksymację  $\hat{G}(\boldsymbol{U})$  można znaleźć "dokładniejsze" oszacowanie położenia punktu centralnego (oszacować wielkości krzywizn głównych) metodą FORM (SORM). Dokładność nowej lokalizacji  $\boldsymbol{u}_c$  należy rozumieć jako reprezentatywne położenie tego punktu ze względu na dokładność oszacowania wartości całki (3.9). Algorytm MPO ze względu na charakter MNK, a także z powodu wzorowania się na metodach FORM oraz SORM, wymaga zastosowania dodatkowych rozwiązań.

#### Procedura poszukiwania punktu centralnego w MPO

Procedura optymalizacyjna RF jest algorytmem gradientowym poszukiwania punktu projektowego (zob. (3.26)). Jeśli nie jest dostępna analiza wrażliwości konstrukcji, to gradient jest wyznaczany metodą różnic skończonych przy określonej wielkości perturbacji. W MPO, na każdym *i*-tym kroku procedury, planowany eksperyment jest podobny do planu wyznaczonego przez metodę różnic skończonych (N = n + 1) lecz o dużo większej odległości pomiędzy punktami  $\delta_i$  tworzącymi plan (przy n = 3, Rysunek 5.1). Wielomian



RYSUNEK 5.1. Plan służący do aproksymacji/interpolacji hiperpłaszczyzny.

pierwszego stopnia (por. (4.29))

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i U_i \tag{5.1}$$

służy do interpolacji funkcji granicznej na każdym kroku procedury optymalizacyjnej. W procedurze RF współczynniki  $b_i$  równania regresji (5.1) są jednocześnie traktowane jako składowe gradientu  $\nabla G(\boldsymbol{U}) = [b_1, b_2, ... b_n]$ . Baza  $\delta_i$  maleje liniowo w trakcie poszukiwania punktu centralnego według następującej formuły

$$\delta_i = \delta_1 \left[ 1 - \frac{3(i-1)}{4(i_{max} - 1)} \right] \,, \tag{5.2}$$

gdzie odległość początkowa  $\delta_1$  oraz maksymalna ilość iteracji  $i_{max}$  są określanymi z góry parametrami procedury. Przerwanie procedury następuje, gdy spełnione zostanie kryterium zbieżności (przy założonej dokładności  $\varepsilon$ , zob. (3.27)), czyli znaleziony zostanie punkt centralny  $\boldsymbol{u}_c$ . W procedurze zastosowano również podstawowy algorytm redukcji długości kroku (zob. (3.30)), w którym długość kroku jest redukowana o połowę (maksymalnie cztery razy, do 1/16 pierwotnej długości kroku), aż do osiągnięcia bezwzględnej wartości funkcji granicznej  $G(\tilde{\boldsymbol{u}}^{(k+1)})$  mniejszej od poprzedniej.

### Obrót przestrzeni $\mathcal{U}$ w MPO

W algorytmie MPO, podobnie jak w metodzie SORM, po znalezieniu  $\boldsymbol{u}_c$  można obrócić przestrzeń  $\mathcal{U}$  tak, aby jedna z osi pokrywała się z kierunkiem wyznaczonym przez wektor prostopadły do funkcji granicznej w punkcie centralnym. Operacja ta pozwala lepiej dopasować wielomian aproksymujący do rzeczywistego kształtu funkcji granicznej w pobliżu powierzchni granicznej  $G(\boldsymbol{u}^*) = 0$  w otoczeniu punktu  $\boldsymbol{u}^*$ .

#### Metoda najmniejszej sumy ważonej kwadratów

W analizie niezawodności metodą FORM, ze względu na własności przestrzeni  $\mathcal{U}$ , najistotniejsze jest położenie punktu projektowego. Dlatego też zastosowanie odpowiednich wag pozwala zapewnić właściwy kształt powierzchni odpowiedzi, zob. wzór (4.22). Nadanie największej wagi punktowi centralnemu zapewnia, że punkt ten będzie położony najbliżej poszukiwanej aproksymacji. Drugim istotnym czynnikiem, wpływającym na wartość oszacowania  $P_f$ , jest kształt powierzchni granicznej w otoczeniu punktu centralnego (por. metodę SORM). Zaproponowana w pracy funkcja przypisuje każdemu punktowi z wybranego zbioru eksperymentów wagę stosownie do wartości funkcji granicznej  $G(\cdot)$  oraz odległości  $\|\cdot\|$  danego punktu od początku układu współrzędnych. Funkcja wagowa  $w(u_i)$  jest następującej postaci:

$$w_i = w_i^{G\nu} * w_i^d \,, \tag{5.3}$$

gdzie

$$w_i^{G\nu} = \begin{cases} 1 - \frac{[G(\boldsymbol{u}_i)]^2}{3\boldsymbol{\mathfrak{p}}^2} & |G(\boldsymbol{u}_i)| \in (0, \, \mathfrak{p}) \\ \frac{2\boldsymbol{\mathfrak{p}}}{3 \, |G(\boldsymbol{u}_i)|} & |G(\boldsymbol{u}_i)| \in (\mathfrak{p}, \, \infty) \end{cases}$$

$$w_i^d = \frac{\Phi(- \parallel \boldsymbol{u}_i \parallel)}{\Phi(- \parallel \boldsymbol{u}_c \parallel)}, \qquad (5.5)$$

a  $\boldsymbol{u}_c$  zawiera współrzędne punktu centralnego. Współczynnik  $\boldsymbol{p} \in (0, 1)$  określa wielkość wpływu wartości funkcji granicznej  $G(\boldsymbol{u}_i)$  na końcową wartość wagi danego punktu. Po wykonaniu szeregu testów przyjęto  $\boldsymbol{p} = 0.01$ , Rysunek 5.2.



RYSUNEK 5.2. Funkcja wagowa w zależności od różnych wartości współczynnika p.

### Sferyczne kryterium wyboru

Następstwem kryterium zbieżności procedury RF (3.27) jest bliskie położenie par eksperymentów ze zbioru eksperymentów składających się na dwie ostatnie iteracje. Również eksperymenty ze wcześniejszych iteracji mogą znajdować się w otoczeniu ostatniego punktu centralnego. Kryterium sferyczne pozwala wyszczególnić zbiór takich eksperymentów i powtórnie wykorzystać informację o funkcji granicznej zawartą w tym zbiorze. Także

70

własności MNK determinują wybór jedynie tych eksperymentów, które znajdują się w otoczeniu punktu centralnego. Promień sfery jest zdefiniowany następującym wzorem

$$R_i = \kappa \delta_i + \varepsilon \,, \tag{5.6}$$

gdzie  $\kappa \geq 1$  jest założonym 'a priori' parametrem (domyślnie  $\kappa = 1$ ). Powyższe kryterium (5.6) może być również używane do selekcji eksperymentów z otoczenia dowolnego punktu centralnego na każdym kroku procedury.

### 5.2. MPO bazująca na standardowym rozwiązaniu MNK

W grupie metod bazujących na standardowym rozwiązaniu MNK pierwszy etap MPO, czyli procedura poszukiwania punktu centralnego, jest realizowany za pomocą najprostszego planu eksperymentów (N = n + 1, Rysunek 5.1). Realizacja drugiego etapu MPO bazuje na punkcie centralnym w obróconej przestrzeni  $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$  oraz dodatkowo na jednym z planowanych eksperymentów: osiowym (N = 2n + 1), kompletnym dwuwartościowym ( $N = 2^n$ ), kompletnym trójwartościowym ( $N = 3^n$ ) lub CCD ( $N = 2^n + 2n + 1$ ). Eksperymenty z pierwszego etapu nie są tu brane pod uwagę. Wybrany zbiór eksperymentów jest realizowany na bazie znalezionego punktu centralnego, wartość  $\delta_i$  z ostatniego kroku pierwszego etapu MPO oraz w przypadku eksperymentu osiowego i CCD ustaloną wartość  $\Delta$  (zob. 4.3). Korzyści płynące z zastosowania powyższej strategii, pomijającej możliwość aproksymacji wagowej, to zalety eksperymentu planowanego (m.in. diagonalność macierzy X<sup>T</sup>X oraz uwzględnienia łącznego wpływu dwóch zmiennych w równaniu regresji, por. 4.3). Podstawową wadą jest natomiast duży koszt obliczeniowy ograniczający stosowanie tej grupy metod do zadań o niewielkiej liczbie zmiennych oraz sztywna struktura planu eksperymentu.

### Przykład. 5.1

Proponowane powyżej rozwiązania były weryfikowane za pomocą przykładu (n = 11), w którym dana analitycznie funkcja graniczna jest następującej postaci

$$g(\mathbf{X}) = 2.1976 - \sum_{i=1}^{n-1} X_i, \qquad (5.7)$$

gdzie zmienne  $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$  podlegają rozkładowi wykładniczemu o wartościach parametrów rozkładu równych dla wszystkich zmiennych,  $\tau = 0$  oraz  $\lambda$ , przy czym drugi parametr jest zmienną losową podlegającą rozkładowi logarytmiczno-normalnemu o wartości średniej  $\bar{\lambda} = 0$  i odchyleniu standardowym  $\sigma_{\lambda} = 0.05$  (przykład ten jest nieznacznie zmodyfikowany w porównaniu do zadania podanego w pracy [39]). Powierzchnia graniczna w tym przypadku jest silnie nieliniowa a różnice w oszacowaniu  $P_f$  metodami FORM i SORM są znaczne:

rozwiązanie dokładne $~\beta_{EXACT}=3.719,$ rozwiązanie COMREL $\beta_{FORM}=2.681,~N=61~$ eksperymentów

rozwiązanie COMREL  $\beta_{SORM} = 3.674$ , N = 61 + 78 = 139 eksperymentów. Wynik oszacowania  $P_f$  za pomocą pierwszego etapu MPO, czyli metodą bazującą na procedurze RF, właściwie nie odbiega od wyniku FORM (N = 61). Wybór wartości  $\delta$  oraz  $\varepsilon$ wpływa na ilość kroków potrzebnych do osiągnięcia zbieżności w MPO ( $\delta = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ). Oszacowanie wskaźnika niezawodności na podstawie pierwszego etapu MPO  $\beta_I$  oraz na podstawie drugiego etapu MPO  $\beta_{II}$  w tej grupie metod podane jest w Tabeli 5.1

Plan	$\beta_I$	$\beta_{II}$	N
osiowy	2.681	$^{1)} 3.671/3.678$	$^{2)} 61/83$
kompletny dwuwartościowy	2.681	2.861	2108
CCD	2.680	$^{1)} 3.668/3.652$	$^{2)}61/2131$

 $^{1)}$ (aproksymacja w przestrzeni $\mathcal{U})/(aproksymacja w przestrzeni<math display="inline">\mathcal{U}_{\mathcal{R}})$ 

 $^{2)}$  (liczba eksperymentów I etapu)/(liczba eksperymentów II etapu)

TABELA 5.1. Wyniki analizy niezawodności MPO przykładu zamieszczonego w pracy [39].

Ponieważ funkcja graniczna jest silnie nieliniowa, to wartość  $\delta$ -ty również wpływa na wynik oszacowania  $\beta_{SORM}$ . Odpowiednio mała wartość  $\delta$  spowoduje powielenie wyniku SORM, otrzymanego programem COMREL. Plan kompletny dwuwartościowy umożliwia jedynie liniową aproksymację powierzchni granicznej. W tym przypadku obrót przestrzeni nie zmienia wartości oszacowania  $P_f$ .

### 5.3. MPO bazująca na ogólnym rozwiązaniu SVD

Punkt centralny, który jest rezultatem pierwszego etapu MPO w grupie metod bazującej na ogólnym rozwiązaniu SVD, jest wyznaczany tak samo jak poprzednio. Natomiast drugi etap wykorzystuje rozwiązanie zadania regresji metodą SVD, które może być stosowane (zob. 4.2) przy dowolnej konfiguracji zbioru eksperymentów. Takie podejście umożliwia wykorzystanie istotnej informacji (wszystkie eksperymenty należące do sfery o promieniu R (5.6) i środku w punkcie centralnym) uzyskanej w trakcie pierwszego etapu MPO oraz informacji uzyskanej z zaplanowanego dodatkowo zbioru eksperymentów.

Dodatkowy zbiór eksperymentów może być zaplanowany w przestrzeni  $\mathcal{U}$  lub  $\mathcal{U}_R$ . W tym podejściu współczynnik  $R^2$  (zob. 4.13) jest wykorzystywany do wyboru tego zbioru. Strategia postępowania jest następująca:

- 1. Obliczenie wartości współczynników  $R_i^2$ , i = 1, ..., n(n+1)/2 na podstawie zbioru wybranych eksperymentów z pierwszego etapu MPO, gdzie kolejnemu  $R_i^2$  odpowiada model składający się z członów liniowych i tylko jednego członu drugiego stopnia (por. 4.29).
- 2. Wybranie określonej (w zbiorze wejściowym danych) liczby największych  $R_i^2$  i odpowiadających im członów drugiego stopnia  $B_{ij}$ , i, j = 1..n.
- 3. Zaplanowanie dodatkowego zbioru eksperymentów stosownie do wybranych zmien-
nych oraz do rodzaju odpowiadających im współczynników.

Taki sposób postępowania ma na celu uwzględnienie jedynie tych zmiennych/współczynników, które są największe. Założona liczba zmiennych uwzględnianych w planowaniu dodatkowego zbioru eksperymentów określa liczbę symulacji jaka będzie wykonywana podczas drugiego etapu MPO. Dodatkowy zbiór eksperymentów jest planowany przy pomocy podstawowych planów eksperymentów przedstawionych w poprzednim rozdziale (zob. 4.3).

Na uwagę zasługuje fakt, że niewielka liczba eksperymentów wybranych z pierwszego etapu MPO nie pozwala na pełną analizę regresji. Dlatego też wybór istotnych członów drugiego stopnia przeprowadzany jest za pomocą możliwie najprostszego modelu. Ostatecznie, końcowe równanie regresji zawiera wszystkie człony liniowe oraz wszystkie wyszczególnione człony drugiego stopnia.



RYSUNEK 5.3. Aproksymacja metody MPO-SORM , n = 3.

### Aproksymacja metody SORM (MPO-SORM)

Wyjaśnienie koncepcji MPO-SORM wymaga nawiązania do algorytmu SORM (rozdział 3.3). Często w praktyce hesjan jest aproksymowany metodą różnic skończonych. Metoda różnic skończonych w tym przypadku oznacza co najmniej N = n(n-1)/2 dodatkowych symulacji (eksperymentów). W wielu przypadkach okazuje się, że nie wszystkie krzywizny główne istotnie wpływają na wynik oszacowania  $P_f$ . Wybierając tylko te największe i rezygnując jednocześnie z analizy pozostałych, można byłoby znacznie zmniejszyć koszt obliczeniowy analizy bez znacznego spadku dokładności. Nie posiadając hesjanu nie ma jednak możliwości określenia kierunków głównych powierzchni. Można natomiast aproksymować funkcję graniczną uwzględniając jedynie największe współczynniki członów drugiego stopnia, a następnie zastosować metodę SORM do znalezienia krzywizn głównych aproksymacji funkcji granicznej. Proponowana metoda polega na planowaniu eksperymentu według następujących reguł:

- 1. Wybranemu współczynnikowi członu kwadratowego  $B_{ii}$  odpowiada eksperyment (punkt '**o**' na Rysunku 5.3) zaplanowany po przeciwnej stronie punktu centralnego w odniesieniu do eksperymentu zaplanowanego na ostatnim kroku pierwszego etapu (tak jak w eksperymencie osiowym).
- 2. Wybranemu współczynnikowi członu mieszanego  $B_{ij}$ ,  $i \neq j$  odpowiada eksperyment (punkt 'o' na Rysunku 5.3) zaplanowany na bazie punktu centralnego wyznaczonego na ostatnim kroku pierwszego etapu MPO z dodatnim przyrostem zmiennych  $U_i$ ,  $U_j$  (podobnie do eksperymentu czynnikowego).

Maksymalna liczba dodatkowych eksperymentów N = n(n+1)/2 w tej metodzie jest większa niż w SORM. Wynika to z faktu, że aproksymacja dotyczy większego obszaru wokół punktu centralnego, czyli musi być aproksymowana funkcja graniczna G(U), a nie powierzchnia graniczna G(U) = 0 tak jak w metodzie SORM. Algorytm umożliwia wybranie liczby współczynników drugiego stopnia.



RYSUNEK 5.4. Połączenie osiowego i czynnikowego planu eksperymentów, n = 3.

### Połączenie osiowego i czynnikowego planu eksperymentów (MPO-SORM4)

Metoda ta różni się w stosunku do metody poprzedniej jedynie ilością eksperymentów planowanych do oszacowania współczynników mieszanych . Współczynnikowi członu kwadratowego  $B_{ii}$  odpowiada jeden eksperyment (punkt '**o**' na Rysunku 5.4) a wybranemu współczynnikowi członu mieszanego  $B_{ij}$ ,  $i \neq j$  odpowiadają cztery eksperymenty (punkt 'o' na Rysunku 5.4) zaplanowane tak jak w eksperymencie czynnikowym  $N = 2^2$ . Maksymalna liczba dodatkowych eksperymentów N = n + 2n(n-1) jest odpowiednio większa. Strategia ta umożliwia lepsze oszacowanie współczynników mieszanych, a więc zdobycie pełniejszej informacji o hiperbolicznym kształcie funkcji granicznej.

### CCD ograniczone do założonego wymiaru podprzestrzeni (MPO-SORMccd)

Dodatkowy zbiór eksperymentów bazujący na CCD planowany jest w całej podprzestrzeni utworzonej przez wybrane zmienne, które determinują obecność w równaniu regresji członów kwadratowych oraz członów mieszanych. Wybór zmiennych odpowiadających członom kwadratowym jest prosty. Selekcję komplikuje wybór zmiennych odpowiadających członom mieszanym. Wybrany współczynnik  $B_{ij}$ ,  $i \neq j$  oznacza, że dwie zmienne  $U_i$ ,  $U_j$  powinny należeć do zbioru zmiennych tworzących podprzestrzeń tak, aby ten współczynnik pojawił się w równaniu regresji. Uwzględnienie obydwu zmiennych może zwiększyć wymiar podprzestrzeni. Ponieważ w metodzie CCD wraz ze wzrostem liczby zmiennych znacznie zwiększa się liczba eksperymentów (zob. 4.3), to wymiar podprzestrzeni nie powinien być większy od założonego. Redukcja wymiaru podprzestrzeni polega na odrzuceniu zmiennych, których człony kwadratowe odpowiadają najmniejszym  $R_i^2$ obliczonym podczas pierwszej selekcji współczynników drugiego stopnia.

Wadą tej metody jest największa liczba dodatkowych eksperymentów, sztywne związanie członów mieszanych z wybranymi zmiennymi oraz możliwość odrzucenia pierwotnie wybranych współczynników podczas redukcji wymiaru podprzestrzeni. Jednocześnie zachodzi możliwość uwzględnienia mało istotnych, nie wybranych członów mieszanych.

### Przykład. 5.2

Powyższe metody były testowane na tym samym zadaniu [39], na którym przeprowadzono analizę proponowanych metod wyznaczania niezawodności w poprzednim przykładzie. Ze względów porównawczych przyjęto we wszystkich przykładach  $\delta = 0.001$  oraz  $\varepsilon = 0.1$ . W zależności od liczby dodatkowych zmiennych (LDZ) drugiego stopnia w aproksymacji funkcji granicznej w Tabeli 5.2 przedstawiono wyniki testów w przestrzeni  $\mathcal{U}$ oraz  $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ .

Wraz ze wzrostem LDZ oszacowanie niezawodności metodami MPO-SORM oraz MPO-SORM4 staje się coraz dokładniejsze, co w dużym stopniu zależy od tego, czy funkcja graniczna jest aproksymowana w przestrzeni  $\mathcal{U}$  czy też w  $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ . W tym pierwszym przypadku, gdy LDZ=11, do uzyskania wyniku bliskiego  $\beta_{SORM}$  metodą MPO-SORM konieczne jest wykonanie N = 126 eksperymentów a metodą MPO-SORM4 aż N = 291 eksperymentów (za zadowalający w obydwu przypadkach można uznać wynik osiągnięty przy,

LDZ	MPO-SORMccd		MPO-SORM4			MPO-SORM			
	$\beta_{II}$	$\beta_{IIR}$	N	$\beta_{II}$	$\beta_{IIR}$	N	$\beta_{II}$	$\beta_{IIR}$	N
3	2.887	2.789	75	2.745	3.179	66	2.717	3.179	66
4	2.999	2.910	85	2.858	3.583	70	2.861	3.583	70
5	3.105	3.028	103	2.895	3.674	87	2.869	3.674	75
6	3.207	3.143	137	2.983	3.674	111	2.966	3.674	81
7	3.306	3.225	203	3.044	3.674	139	3.198	3.674	88

TABELA 5.2. Wyniki analizy niezawodności MPO bazującą na ogólnym rozwiązaniu SVD przykładu zamieszczonego w pracy [39] (wynik dokładny  $\beta_{EXACT} = 3.719$ ).

odpowiednio N = 75 i N = 87, LDZ=5). Dokładność oszacowania niezawodności metodą MPO-SORMccd nie rośnie tak szybko wraz ze wzrostem LDZ. Ponadto, zwiększanie LDZ powoduje znaczny wzrost liczby eksperymentów, bez spodziewanej istotnej poprawy wyników.

## 5.4. MPO w przypadku analizy nieciągłej pierwszej pochodnej funkcji granicznej (MPONP)



RYSUNEK 5.5. Koncepcja pierwszego etapu MPONP, pierwsze trzy iteracje.

W niektórych rodzajach analizy konstrukcji pierwsza pochodna funkcji granicznej może być nieciągła. Ogólna tendencja zmian wartości takiej funkcji jest liniowa lecz różnice wartości sąsiadujących punktów mogą być znaczące. W praktyce inżynierskiej przyjęto określać charakter tego typu funkcji słowem 'szum'. Analiza niezawodności bazująca na gradientowych algorytmach optymalizacyjnych (np. FORM) staje się wtedy nieprzydatna, a rozwiązanie zadania metodami symulacyjnymi (np. Adaptive Monte Carlo (AMC)) w przypadku niewielkiej liczby zmiennych okazuje się zbyt kosztowne. Próbą rozwiązania problemu może być zastosowanie MPO (pierwszy etap) z wystarczająco dużym  $\delta$ , np.  $\delta = \sigma$  (lub planu eksperymentów wynikającego z metody różnic skończonych lub centralnych przy wykraczającej poza ramy teorii wielkości perturbacji) i odpowiednio słabiej postawionym kryterium zbieżności. Tego typu postępowanie jednak nie zawsze pozwala osiągnąć zadowalający wynik. Osiąganie niezadowalających rezultatów jest spowodowane trudnościami w doborze odpowiedniej wartości  $\delta$ , które wynikają między innymi z braku informacji o ogólnej postaci funkcji granicznej oraz wielkości występujących nieciągłości.

Metodą zapewniającą zbieżność jest MPO (Rysunek 5.5), w której na każdym kroku pierwszego etapu, wykorzystując wszystkie eksperymenty z otoczenia aktualnego punktu centralnego<sup>1)</sup> (zob. 5.6), jest przeprowadzana aproksymacja liniowa (5.1). Kryterium zbieżności jest nałożone na współrzędne gradientów poprzedniej i bieżącej aproksymacji, które mogą częściowo bazować na podzbiorze tych samych eksperymentów. Ostatecznie dużo więcej eksperymentów bierze udział w końcowej aproksymacji funkcji granicznej (Rysunek 5.6). Dostępne są dwa plany eksperymentów, podstawowy MPONP (Rysunek 5.1) oraz osiowy MPONP2 (Rysunek 4.3).



RYSUNEK 5.6. Koncepcja pierwszego etapu MPONP, iteracje z których eksperymenty znajdują się wewnątrz otoczenia ostatniego, szóstego punktu centralnego.

<sup>&</sup>lt;sup>1)</sup>Podobne rozwiązanie można znaleźć w pracy Standera [110], która dotyczy zagadnienia optymalizacji kształtu stempla do tłoczenia blach w przy użyciu metody powierzchni odpowiedzi.

### Przykład. 5.3

Testy MPONP oraz wcześniejszych metod przeprowadzono na wielomianie drugiego stopnia, który poszerzono o człon wprowadzający lokalne fluktuacje modelujące nieciągłość funkcji granicznej. Przyjęto wielomian o następującej postaci

$$G(\mathbf{X}) = 30 - X_1^2 - X_2 + 2X_3 - 2X_4 - 3X_1X_3 - 4X_1X_2 + X_2X_3 - 3X_4^2 - \theta[\sin(50X_1^2) - \sin(50X_2) + \sin(100X_3) - \sin(100X_4) - \sin(100X_1X_3) - (5.8) \\ \sin(100X_1X_2) + \sin(50X_2X_3) - \sin(100X_4^2)],$$

gdzie  $\theta = [0; 0.01; 0.1; 0.5]$  określa wielkość szumu, a zmienne losowe  $X_1 \dots X_4$  podlegają standardowemu rozkładowi normalnemu i są niezależne. Porównawczy wynik, który w zasadzie nie zależy od wielkości szumu, uzyskano metodą Monte Carlo  $\beta_{MC} = 2.475 \ (\nu_{\hat{P}_f} = 1.73\%, N = 5 \cdot 10^5).$  Testy MPO przeprowadzono przy takich samych wartościach parametrów  $\delta = 0.500$  i  $\varepsilon = 0.001$  z pierwszego etapu MPO oraz przy takiej samej lokalizacji punktu startowego (początek układu współrzędnych) porównywanych metod. Tablica 5.3 zawiera wyniki przeprowadzonej analizy. Pierwszy etap MPO jest czuły na wybór lokalizacji punktu startowego, co wynika z zastosowania aproksymacji funkcji granicznej na podstawie zbioru dość odległych od siebie eksperymentów do oszacowania gradientu, oraz z kształtu samej funkcji granicznej. MPO nie zawsze zbiega do punktu projektowego  $u^*$  wyznaczonego metodą FORM, która niezależnie od lokalizacji punktu startowego znajduje ten sam punkt  $u^*$  (gdy  $\theta = 0$ ). Funkcja (5.8) ma więc jeden punkt projektowy. Domyślna lokalizacja punktu startowego w początku układu współrzędnych przypadkowo zapewniła odpowiednią zbieżność w większości przypadków  $(\beta_I = 2.8)$ . Znacznie różni się tylko oszacowanie  $\beta_I$  metodą MPO-SORMccd i MPONP2, gdy  $\theta = 0.5$  a LDZ=4. Wyniki drugiego etapu w oczywisty sposób związane są z rezultatami pierwszego etapu, są również zależne od odległości  $\Delta$  od punktu centralnego w jakiej zaplanowany jest każdy eksperyment z dodatkowego zbioru eksperymentów. W przypadku zależności innej niż drugiego stopnia wielkość ta może powodować znaczne różnice w oszacowaniu  $P_f$ .

Wzrost wartości parametru  $\theta$  zwiększa niekorzystne efekty, ostatecznie uniemożliwiając zastosowanie metody FORM (SORM). MPO pozwala uzyskać oszacowanie  $P_f$ , do którego nie można mieć jednak pełnego zaufania. W rozważanym przykładzie przy  $\theta = 0.5$  fluktuacje są tak znaczne, że w zasadzie uniemożliwiają uzyskanie za pomocą dostępnego zbioru eksperymentów reprezentatywnej powierzchni odpowiedzi. Wyznaczenie  $P_f$  w takim przypadku wymagałoby zastosowania czasochłonnych metod symulacyjnych.

Przykład ten, chociaż tabela zawiera poprawne wartości wskaźnika niezawodności, wyraźnie uwidacznia wady zastosowanej metody. W ogólnym przypadku ogranicza stosowanie MPO do funkcji o wyraźnej lokalizacji jedynego punktu projektowego, np. hiperpłaszczyzny. Zaletą jest możliwość oszacowania  $P_f$  w przypadku gdy istnieją lokalne nieciągłości pierwszej pochodnej bądź samej funkcji granicznej. Przykład tego typu funkcji jest analizowany w prezentowanym poniżej przykładzie.

5.5.	Schemat	SYSTEMU	ANALIZY	NIEZAWODNOŚCI	KONSTRUKCJI
------	---------	---------	---------	---------------	-------------

LDZ	MPO-S	SORMccd	MPO-SORM4		MPO-SORM		MPONP		MPONP2	
	$\beta_{II}$	N	$\beta_{II}$	N	$\beta_{II}$	N	$\beta_{II}$	N	$\beta_{II}$	N
$\theta = 0,$	$\theta = 0, \ \beta_{FORM} = 2.823 \ (N = 61), \ \beta_{SORM} = 2.411 \ (N = 77)$									
	$\beta_I = 2.$	.824 ( $N = 1$	72)				$\beta_I = 2.$	828, 2	2.823	
1			2.748	62	2.748	62	2.868	104	2.822	128
2	2.621	70	2.620	71	2.404	65	3.140	113	2.622	133
3	2.486	76	2.325	76	2.362	67	2.461	118	2.695	142
4	2.486	76	2.411	89	2.411	71	2.411	131	2.411	155
$\theta = 0.$	01, $\beta_{FO}$	RM = 2.80	8 (N = 1)	150), $\beta_{SC}$	$D_{RM} = 3$	.185 (N	= 165)			
	$\beta_I = 2.$	.823 ( $N = -$	48)				$\beta_I = 2.$	.828, 2	2.827	
1			2.761	49	2.771	49	2.843	53	2.822	96
2	2.634	57	2.634	58	2.643	52	2.632	58	2.562	101
3	2.463	63	2.519	67	2.013	55	2.531	67	2.679	110
4	2.393	73	2.482	76	2.323	58	2.576	80	2.462	123
$\theta = 0.$	10, $\beta_{FO}$	RM = -, h	orak zbie	eżności						
	$\beta_{I4} = 2$	2.550	$\beta_I = 2.$	.824 (N =	= 54)		$\beta_I = 2.818$			
1			2.862	55	2.862	55	2.809	49	2.820	168
2	2.764	63	2.762	60	2.778	57	2.755	54	2.930	170
3	2.764	63	2.676	69	2.719	60	2.779	63	2.905	182
4	2.386	79	2.657	82	2.634	64	2.770	76	2.871	195
$\theta = 0.$	50, $\beta_{FO}$	RM = -, h	orak zbie	eżności						
	$\beta_{I4} = 1$	$\beta_{I4} = 1.208$ $\beta_I = 2.773 \div 2.813 \ (N = 60)$			$\beta_I = 2.$	800, 2	2.820			
1			2.936	61	2.936	61	2.859	40	2.852	143
2	2.815	69	2.912	66	2.802	63	2.820	45	2.652	148
3	2.796	75	2.858	75	2.719	66	2.562	54	1.904	157
4	1.234	85	2.829	88	2.790	70	2.787	67	1.093	170

TABELA 5.3. Rezultaty testów przykładu 5.3.

### 5.5. Schemat systemu analizy niezawodności konstrukcji

W skład systemu umożliwiającego analizę niezawodności konstrukcji, Rysunek 5.7, wchodzą:

- 1. program MES generujący odpowiedź konstrukcji  $g(\boldsymbol{x}_i)$ ;
- 2. moduł MPO, który umożliwia znalezienie aproksymacji funkcji granicznej  $\hat{g}(\boldsymbol{x})$  na podstawie zbioru danych  $\{(\boldsymbol{x}_i, g(\boldsymbol{x}_i)), i = 1, \ldots, N\};$
- 3. program do analizy niezawodności COMREL wyznaczający prawdopodobieństwo awarii na podstawie dostępnej aproksymacji  $\hat{g}(\boldsymbol{x})$ .

Moduł MPO został napisany w środowisku programu COMREL, co pozwoliło na wykorzystanie szeregu udogodnień związanych z typowymi zagadnieniami analizy niezawod-



RYSUNEK 5.7. Schemat blokowy systemu analizy niezawodności konstrukcji sprężysto– plastycznych.

ności, Rysunek 5.8. Tak jak to pokazano w Rozdziale 5.1 algorytm MPO jest realizowany w dwóch etapach.



RYSUNEK 5.8. Schemat blokowy numerycznej realizacji MPO w analizie niezawodności konstrukcji sprężysto–plastycznych.

### 5.6. Przykłady zastosowań MPO

Prezentowane poniżej przykłady obrazują możliwe zastosowania MPO w analizie niezawodności złożonych zagadnień inżynierskich. W zagadnieniach tych uwzględnienie losowej natury parametrów opisujących konstrukcję pozwala w bardziej świadomy sposób projektować rzeczywiste konstrukcje.

### Przykład. 5.4

Metoda MPONP (oraz MPONP2) została użyta do oszacowania  $P_f$  procesu tłoczenia głębokiego blachy aluminiowej (zob. [55, 95, 57, 54, 53]), Rysunek 5.9. Symulacje procesu tłoczenia prowadzono stosując program elementów skończonych STAMPACK, zob. [96, 84]. Do najczęściej pojawiających się w tym zagadnieniu defektów należą pęknięcia blachy, których możliwość powstania ocenia się w praktyce na podstawie wykresu granicznej krzywej tłoczenia, Rysunek 5.10. Punkty powyżej granicznej krzywej tłoczenia odpowiadają wielkościom odkształceń głównych, dla których z bardzo dużym prawdopodobieństwem podczas tłoczenia wystąpi pękanie blachy, zaś punkty poniżej krzywej granicznej tłoczenia odpowiadają stanom bezpiecznym. Z powodu niepewności oceny możliwości wystąpienia pęknięcia wprowadza się pewien zapas bezpieczeństwa poniżej granicznej krzywej tłoczenia (na ogół 5 lub 10% wielkości odkształcenia głównego  $\varepsilon_1$ ) nazywany marginesem bezpieczeństwa. Funkcja graniczna jest zdefiniowana jako najmniejsza pionowa odległość punktu w przestrzeni odkształceń głównych (spośród wszystkich punktów odpowiadających przyjętej dyskretyzacji metody elementów skończonych) od granicznej krzywej tłoczenia, co jest tożsame ze sposobem definiowania marginesu bezpieczeństwa. Zgodnie z ogólną konwencją odległość punktów leżących ponad krzywą graniczną przyjmowana jest ze znakiem minus, a pod krzywą ze znakiem plus, por. wzory (3.1a-c) Rozdział 3. Ze względu na stosowany do symulacji procesu tłoczenia algorytm



RYSUNEK 5.9. Geometria zadania głębokiego tłoczenia kwadratowej miski aluminiowej.



RYSUNEK 5.10. Rozkład odk<br/>ształceń głównych wytłoczki przy głębokości tłoczenia <br/> 15mmoraz graniczna krzywa tłoczenia.

bezpośredniego całkowania równań ruchu i związane z nim problemy z różniczkowalnością funkcji granicznej nie jest możliwe stosowanie metod analizy niezawodności pierwszego lub drugiego rzędu. Metody symulacyjne w praktycznym zastosowaniu są natomiast zbyt czasochłonne i zostały wykorzystane jedynie w celu weryfikacji proponowanej metody powierzchni odpowiedzi.

Rozważane zagadnienie głębokiego tłoczenia kwadratowej miski aluminiowej było przykładem testowym na konferencji Numisheet'93 (zob. [75]), gdzie przyjęte były dane deterministyczne takie jak: grubość początkowa blachy 0.81mm, moduł Young'a E = 71 GPa, współczynnik Poisson'a  $\nu = 0.33$ , rzeczywista krzywa jednoosiowego rozciągania,  $\sigma = 576.79(0.01658 + \varepsilon^p)^{0.3593}$  MPa, współczynnik tarcia  $\mu = 0.162$  i siła dociskacza 19.6 kN.

	Rozkład	Wartość oczekiwana	Odch. stand.	Opis zmiennych
$X_1$	log–normalny	$0.8\mathrm{mm}$	$0.04\mathrm{mm}$	Początkowa grubość blachy
$X_2$	log–normalny	$5.7679 \cdot 10^{8}  \mathrm{Pa}$	$3.0 \cdot 10^7 \mathrm{Pa}$	Stała materiałowa
$X_3$	log–normalny	$4900\mathrm{N}$	$50\mathrm{N}$	Siła dociskacza
$X_4$	log–normalny	0.162	0.015	Wsp. tarcia blacha–stempel
$X_5$	log–normalny	0.162	0.015	Wsp. tarcia blacha–matryca
$X_6$	log–normalny	0.162	0.015	Wsp. tarcia blacha–dociskacz

TABELA 5.4. Zmienne losowe.

Metoda	ρ	$P_f$	$\beta_I = -\Phi^{-1}(P_f)$	Liczba symulacji	$ u_{\widehat{P}_f}$	ε
AMC	0	$4.07 \cdot 10^{-7}$	4.93	9264	5%	
AMC	0.3	$6.51\cdot 10^{-6}$	4.36	4326	5%	
AMC	0.9	$4.62 \cdot 10^{-5}$	3.91	3325	5%	
AMC	1	$5.06 \cdot 10^{-5}$	3.89	2826	5%	
MPONP	0.3	$8.94 \cdot 10^{-6}$	4.29	127		0.1
MPONP2	0.3	$6.51 \cdot 10^{-6}$	4.36	130		0.1
MPONP	0.9	$6.01 \cdot 10^{-5}$	3.85	67		0.1
MPONP2	0.9	$4.75 \cdot 10^{-5}$	3.90	110		0.1

TABELA 5.5. Porównanie wyników MPO oraz AMC analizy niezawodności procesu tłoczenia blachy.

Początkowa analiza miała na celu określenie wpływu losowego charakteru kluczowych parametrów procesu głębokiego tłoczenia blachy na prawdopodobieństwo wystąpienia awarii (pęknięcia blachy). Pod uwagę były brane takie parametry jak: grubość początkowa arkusza blachy, stała materiałowa blachy, siła dociskacza oraz współczynniki tarcia na styku blachy i dociskacza, blachy i stempla, oraz blachy i matrycy. Przyjęto sześć zmiennych losowych o logarytmiczno-normalnym rozkładzie funkcji gęstości prawdopodobieństwa, Tabela 5.4. Zastosowanie MPONP oraz MPONP2 umożliwiło efektywną analizę zagadnienia. Ilość symulacji potrzebnych do oszacowania  $P_f$  okazała się znacznie mniejsza niż w przypadku metody AMC, Tabela 5.5. Wyniki otrzymane przy użyciu MPO objęły jedynie oszacowanie  $P_f$  na podstawie pierwszego etapu metody przy założonym kryterium zbieżności  $\varepsilon = 0.1$ . Zbadano również wpływ wielkości korelacji pomiędzy współczynnikami tarcia na oszacowanie prawdopodobieństwa awarii procesu tłoczenia. Wzrost korelacji powodował większą zawodność procesu, dlatego też w następnym etapie badań przyjęto pełną korelację pomiędzy współczynnikami tarcia. Tym samym, zamiast trzech współczynników tarcia przyjęto jeden współczynnik. Przyjęcie tego założenia zapewnia, że analizowany będzie najmniej korzystny przypadek procesu tłoczenia. Założenie to znacznie zmniejsza wymiar zadania umożliwiając efektywne badanie innych aspektów procesu tłoczenia.

Na następnym etapie badań zredukowano liczbę zmiennych losowych do trzech, Tabela 5.6. Przeprowadzono analizę zmian wielkości marginesu bezpieczeństwa oraz war-

	Rodzaj rozkładu	Wartość Średnia	Odch. stand.	Opis zmiennych
$X_1$	log–normalny	0.81 mm	0.04 mm	Początkowa grubość blachy
$X_2$	log-normalny	0.162	0.015	Współczynnik tarcia
$X_{n1}$	log–normalny	0.3593	0.015	współczynnik wzmocnienia
$X_{n2}$	log–normalny	0.3593	0.020	współczynnik wzmocnienia

TABELA 5.6. Zmienne losowe.

		1								
Н	$\sigma_{n1}$	MPONP2		MPONP2			AMC			
[mm]	$\sigma_{n2}$	$P_f$	$\beta_I$	N	$P_f$	$\beta_{II}$	N	$\beta$	$ u_{\widehat{P}_f}$	N
16	0.15	$8.23 \cdot 10^{-7}$	4.793	46	$1.15 \cdot 10^{-6}$	4.725	61			
	0.20	0.000100	3.718	39	$9.85 \cdot 10^{-5}$	3.723	54	3.721	7.10%	1000
17	0.15	0.000370	3.374	46	0.000314	3.419	61			
	0.20	0.00437	2.622	29	0.00401	2.651	44			
18	0.15	0.0165	2.132	29	0.0148	2.176	44			
	0.20	0.0485	1.660	29	0.0476	1.669	44	1.670	5.32%	1000
19	0.15	0.132	1.119	39	0.108	1.238	54			
	0.20	0.192	0.869	40	0.182	0.907	55			
20	0.15	0.337	0.422	59	0.280	0.584	74			
	0.20	0.373	0.324	23	0.395	0.267	38	$0.342^{(1)}$	5.89%	500

5. Wybrane algorytmy analizy niezawodności przy użyciu MPO

<sup>(1)</sup> Metoda Crude Monte Carlo.

TABELA 5.7. Wyniki analizy niezawodności procesu głębokiego tłoczenia blachy.

tości  $P_f$  dla misek o różnych głębokościach H. Wykonane badania miały również na celu określenie wpływu losowości współczynnika wzmocnienia na szacowane  $P_f$  procesu tłoczenia. Obliczenia przeprowadzono dla dwóch wartości odchylenia standardowego współczynnika wzmocnienia,  $n_1$  i  $n_2$ . Wyniki otrzymane przy użyciu MPO objęły oszacowanie  $P_f$ na podstawie pierwszego oraz drugiego etapu metody, Tabela 5.7. Z oszacowania  $P_f$  (oraz wielkości krzywizn głównych) na podstawie drugiego etapu MPO wynika, że aproksymacja funkcji granicznej jest zbliżona do hiperpłaszczyzny. Ta uzyskana niewielkim kosztem informacja pozwala domniemywać o poprawności otrzymanych wyników.

Ze stopniem zagłębienia stempla (H) związana jest wielkość marginesu bezpieczeństwa, której wartość jest wyznaczana przy pomocy realizacji procesu tłoczenia dla wartości średnich parametrów losowych, co odpowiada przyjętej przez producentów, deterministycznej procedurze projektowania produkcji. Dla danego zagłębienia H stempla przeprowadzana jest również analiza niezawodności. Rysunek 5.11 przedstawia wielkość prawdopodobieństwa zniszczenia, oszacowanego na pierwszym etapie MPO, w funkcji marginesu bezpieczeństwa dla dwóch wartości odchylenia standardowego współczynnika wzmocnienia  $\sigma_{n1} = 0.15$  i  $\sigma_{n2} = 0.20$ . Wraz ze wzrostem marginesu bezpieczeństwa  $P_f$  maleje coraz szybciej. Przy wartości marginesu bezpieczeństwa równej 7.44% odpowiadająca  $\sigma_{n1}$  i  $\sigma_{n2}$ wartość prawdopodobieństwa zniszczenia różni się znacznie. W obydwu przypadkach proces tłoczenia byłby jednak aż nadto niezawodny w stosunku do wymagań producenta, a dalszy wzrost marginesu bezpieczeństwa doprowadziłby do niepotrzebnej redukcji  $P_f$ . Przeprowadzona analiza pokazuje jak margines bezpieczeństwa oraz wielkość odchylenia standardowego współczynnika wzmocnienia wpływają na wielkość  $P_f$ .

Oszacowanie za pomocą MPO wielkości prawdopodobieństwa zniszczenia w przypadku dużych wartości  $P_f$  jest obarczone znacznym błędem. Dlatego w takim przypadku MPO jedynie informuje o zbyt dużej, nie akceptowalnej wartości  $P_f$ .

84



RYSUNEK 5.11. Prawdopodobieństwo zniszczenia w funkcji marginesu bezpieczeństwa.

## 5.6.1. Wybrane przykłady analizy niezawodności. Przykłady te wykonane zostały w ramach projektu ASRA–HPC 5 programu ramowego UE.

Brak zintegrowanych programów komputerowych umożliwiających, obok standardowej analizy konstrukcji, dodatkowo analizę niezawodności, jest jednym z głównych powodów niezbyt szerokiego jej zastosowania w praktyce inżynierskiej. Standardowy pre– i post– procesor metody elementów skończonych nie pozwala uwzględnić stochastycznego opisu zmiennych, niezbędnego w szacowaniu prawdopodobieństwa awarii. Stosowanym do nie-dawna rozwiązaniem było połączenie kilku programów komputerowych komunikujących się ze sobą poprzez utworzenie programów uzgadniających formaty i strukturę danych.

W ramach projektu ASRA–HPC zintegrowano program PERMAS (komercyjny program MES używany w europejskim przemyśle samochodowym, stoczniowym oraz kosmicznym) z programem COMREL umożliwiającym analizę niezawodności standardowymi metodami oraz dodatkowo opracowaną MPO.

Poniższe przykłady zostały wykonane za pomocą pakietu PERMAS–COMREL przez uczestników projektu ASRA–HPC (Alcatel Space Industry, Principie Marine oraz FZJ GmbH).

### Przykład. 5.5

Rozpatrywano zagadnienie liniowej analizy statycznej zbiornika ciśnieniowego poddanego działaniu wysokich temperatur, w którym stałe materiałowe zależą od temperatury. Zbiornik został podzielony na 266 przestrzennych elementów 27 węzłowych. Dało to w sumie 9916 stopni swobody, Rysunek 5.12. W przykładzie przyjęto dziesięć zmiennych losowych, w tym istotne z punktu widzenia analizy stałe materiałowe takie jak granicę plastyczności, moduł Young'a oraz współczynnik rozszerzalności cieplnej. Założono istnienie pomiędzy nimi korelacji przyjmując  $\rho = 0.5$ . Druga grupa zmiennych losowych



RYSUNEK 5.12. Zbiornik ciśnieniowy.

obejmowała obciążenie z założonym współczynnikiem korelacji pomiędzy ciśnieniem i temperaturą. Funkcja graniczna została zdefiniowana jako różnica pomiędzy naprężeniem granicznym a maksymalnym naprężeniem zredukowanym. Rezultaty analizy zawiera Tablica 5.8. Warto zwrócić uwagę na niewielki, w porównaniu do metody AMC, czas obliczeń. Wyniki są bliskie oszacowaniu  $P_f$  metodą SORM, a w przypadku wymagającej dłuższego czasu obliczeń metody CCD wynik zbliża się do oszacowania prawdopodobieństwa metodą AMC. Dokładność wydaje się być zadowalająca przy zastosowaniu MPO do wstępnej oceny niezawodności konstrukcji. Analiza została przeprowadzona we wstępnej fazie trwania projektu, gdy MPO ulegała jeszcze modyfikacji.

Metoda	CPU $[s]$	$P_f$
AMC	1182	$2.77 \cdot 10^7$
SORM	78	$2.04 \cdot 10^{7}$
Plan osiowy	182	$2.01 \cdot 10^{7}$
CCD	283	$2.21 \cdot 10^{7}$
MPO-SORMccd	234	$2.03\cdot 10^7$

TABELA 5.8. Rezultaty analizy niezawodności zbiornika ciśnieniowego.



RYSUNEK 5.13. Siatka elementów skończonych modelu statku kosmicznego 'Proteus'.

### Przykład. 5.6

Analiza niezawodności modelu statku kosmicznego 'Proteus' poddanego różnym rodzajom obciążeń (temperatura, przyspieszenie i obciążenie stałe). Model, Rysunek 5.13, którego siatka elementów skończonych była wykorzystywana w analizie konstrukcji w firmie projektowej, składa się z 7117 elementów płytowych i belkowych o 36000 stopni swobody. Wśród 37 zmiennych losowych znalazły się przekroje poprzeczne elementów belkowych, sztywność płytowa, własności materiałowe oraz obciążenie. Została zdefiniowana naprężeniowa funkcja graniczna jako różnica pomiędzy maksymalną wartością naprężenia a naprężeniem granicznym materiału. Analiza niezawodności została przeprowadzona standardowymi metodami oraz MPO, Tabela 5.9.

Metoda	$\beta$	$P_f$	Liczba symulacji
AMC	2.504	$6.12 \cdot 10^{(-3)}$	2285
FORM	2.406	$8.07 \cdot 10^{(-3)}$	35
pierwszy etap bazujący na procedurze RF	2.391	$8.40 \cdot 10^{(-3)}$	105
Plan osiowy	2.391	$8.40 \cdot 10^{(-3)}$	125
MPO-SORMccd	2.348	$9.44 \cdot 10^{(-3)}$	357

TABELA 5.9. Rezultaty analizy niezawodności modelu statku kosmicznego 'Proteus'.

Wyniki potwierdzają dokładność rezultatów otrzymanych MPO w porównaniu do innych metod. Ponadto wynik analizy metodą AMC został uzyskany przy znacznej liczbie symulacji N=2285 (czas trwania analizy to około 5 godzin) oraz współczynniku zmienności estymatora  $\nu_{\widehat{P}_f}=30.5\%$  co oznacza, że wynik nie jest zbyt dokładny. Uzyskanie akceptowalnej w praktyce inżynierskiej dokładności, czyli odpowiednio mniejszej wartości współczynnika  $\nu_{\widehat{P}_f}$  oznacza zbyt długi czas obliczeń.

### Przykład. 5.7

MPO była również testowana na przykładzie modelu rzeczywistego jednokadłubowego szybkiego statku, Rysunek 5.14. Model składa się z 27722 elementów płytowych i belkowych. Jest to nowa i nietypowa konstrukcja, w przypadku której brak danych statystycznych uniemożliwia stworzenie ogólnych reguł projektowania powszechnie stosowanych w przemyśle stoczniowym. Dostępny jest jedynie zbiór zaleceń proponowanych przez *Towarzystwo Klasyfikacyjne* (ang.Classification Society). Odnośnie bezpieczeństwa konstrukcji Towarzystwo Klasyfikacyjne zaleca porównanie wytrzymałości materiału z maksymalnymi naprężeniami mogącymi pojawić się w czasie oczekiwanego czasu eksploatacji statku oraz uwzględnianie w analizie naprężeń zmęczeniowych. Współczynniki bezpieczeństwa są określane na podstawie doświadczenia uzyskanego z obserwacji eksploatowanych jednostek. Metoda taka może być z powodzeniem stosowana w projektowaniu nowych statków. Jednakże konieczny proces optymalizacji z uwagi na cel jakim jest osiągnięcie jak największej prędkości statku znacznie zawęża margines bezpieczeństwa optymalnego rozwiązania.

W prezentowanym przykładzie docelowo duża prędkość statku stoi w sprzeczności z jego masą, a zadanie dodatkowo komplikuje zmieniająca się ilość zużywanego paliwa. Zastosowanie aluminium lub ciągliwego metalu z kolei uwrażliwia konstrukcję statku na zmęczenie. Stąd możliwość eksploatacji statku, który osiąga duże prędkości, warunkuje



RYSUNEK 5.14. Siatka elementów skończonych modelu szybkiego statku.



RYSUNEK 5.15. Schemat konstrukcji statku.

stan morza. Jednak nawet przy określonym stanie morza zdarzają się fale określające cięższe, niedopuszczalne warunki. Ich skutkiem są uderzenia dziobu statku o fale. To zjawisko było bezpośrednią przyczyną uszkodzeń obserwowanych na prototypowym statku. Analiza niezawodności umożliwia lepsze oszacowanie ryzyka powstawania tego typu uszkodzeń.

Na pierwszym etapie analizy konstrukcja została poddana procesowi optymalizacji, który zawęził margines bezpieczeństwa. Następnie została przeprowadzona analiza niezawodności typowych, spawanych elementów poszycia statku (Rysunek 5.15) ze względu na wyboczenie oraz zniszczenie zmęczeniowe. Została przyjęta funkcja graniczna zawierająca własności materiałowe oraz opis obciążeń. Do obliczeń niezawodności ze względu na zmęczenie materiału przyjęto globalne obciążenie falą dla 15 letniego cyklu eksploatacji. Wyniki analizy (Tabela 5.10) potwierdzają dobrą zgodność MPO z SORM.

Dodatkowo została przeprowadzona analiza niezawodności ze względu na możliwość powstania częstości rezonansowych. W projektowaniu statków pasażerskich jednym z ważniejszych kryteriów branych pod uwagę jest komfort. Stąd, przedmiotem wnikliwych badań była możliwość wystąpienia na pokładach dostępnych pasażerom (Rysunek 5.16) modów rezonansowych, a w szczególności modów niskich częstości. Przewidywanie wielkości drgań umożliwia analiza numeryczna, która powinna być przeprowadzona we wczesnej fazie projektowania, aby zapobiec konieczności wprowadzania kosztownych zmian w rzeczywistej realizacji projektu. W tej fazie projektu wiele czynników mających wpływ na częstość rezonansową, w szczególności rozmieszczenie masy (np. sprzętu i wyposażenia), jest określonych z danym stopniem niepewności. Zastosowanie analizy niezawodności pozwala ocenić wpływ tych niepewności na prawdopodobieństwo wystąpienia zjawiska rezonansu pokładu wzbudzanego pracą śruby. Funkcja graniczna została

Metoda	CPU $[s]$	$P_f$
SORM	1560	0.153
CCD	5040	0.157

TABELA 5.10. Rezultaty analizy niezawodności ze względu na zmęczenie materiału.



RYSUNEK 5.16. Model MES pokładu dostępnego pasażerom.

zdefiniowana jako różnica pomiędzy pierwszą, najniższą częstością własną konstrukcji a częstością wzbudnika–śruby. Przyjęto model stochastyczny z 13 zmiennymi podlegającymi rozkładowi Gaussa, opisującymi obciążenie pochodzące od wyposażenia i zależne od jego lokalizacji. Ponieważ w tym zagadnieniu nie ma możliwości wyznaczenia gradientów zastosowano MPO. Wyniki analizy przedstawia Tabela (5.11). Nie wykonano testu weryfikującego MPO metodami symulacyjnymi MC oraz AMC ze względu na przewidywany, zbyt długi, czas potrzebny do przeprowadzenia analizy.

Metoda MPO	CPU $[s]$	$P_f$
pierwszy etap bazujący na procedurze RF	5640	0.0056
plan osiowy	6060	0.0058

TABELA 5.11. Rezultaty analizy niezawodności ze względu na możliwość powstania częstości rezonansowych.

# ROZDZIAŁ 6

### Analiza niezawodności konstrukcji sprężysto–plastycznych z wykorzystaniem MPO

W tej części niniejszej pracy zaproponowano metodę szacowania prawdopodobieństwa awarii konstrukcji sprężysto-plastycznych przy użyciu MPO. W badaniu wpływu losowej natury parametrów na zachowanie się konstrukcji brano pod uwagę jedynie obciążenie. Opracowana metoda pozwala analizować niezawodność przystosowania oraz rozwiązać pewną klasę zadań niezawodności nośności granicznej. Efektywność MPO została zilustrowana dwoma przykładami.

### 6.1. Opis stochastyczny obciążeń

W analizie niezawodności konstrukcji sprężysto-plastycznych największy wpływ na prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji ma losowy charakter obciążenia. Istotnym składnikiem opisu obciążeń jest czas. Uwzględnienie czasu w modelu obciążeń (traktowanie obciążenia jako procesu stochastycznego), w konsekwencji pociągałoby znaczne skomplikowanie algorytmu numerycznego z powodu konieczności prowadzenia analizy sprężystoplastycznej konstrukcji w czasie. Przeprowadzenie takiej analizy wobec współczesnych wymagań projektowych byłoby nieefektywne lub wręcz niemożliwe. Wynika stąd konieczność zastosowania szeregu założeń upraszczających opis stochastyczny obciążeń z zachowaniem tych istotnych cech obciążenia, które są najważniejsze w rozpatrywanych w niniejszej pracy zagadnieniach.

Zgodnie z założeniami dotyczącymi charakteru obciążenia podanymi w Rozdziale 2.2., zob. (2.11, 2.12), obciążenie można opisać za pomocą granic zmian mnożników obciążenia

 $\mu_s^-$ i  $\mu_s^+$ gdzie  $\mu_s^- \leq 0 \leq \mu_s^+$ ,  $s = 1 \dots n_s$ . Obszar zmienności obciążeń jest określony w  $n_s$  wymiarowej przestrzeni mnożników obciążenia

$$\{\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_s}] | \mu_i \in R; \, i = 1 \dots n_s \},$$
(6.1)

zob. Rysunek 2.1. Wygodniej jest natomiast operować w  $2n_s$  wymiarowej przestrzeni granic mnożników obciążenia,

$$\{\boldsymbol{\mu}^{\pm} = [\mu_1^-, \mu_1^+, \mu_2^-, \mu_2^+, \dots, \mu_{n_s}^-, \mu_{n_s}^+] | \mu_i^-, \mu_i^+ \in R; \ i = 1 \dots n_s \},$$
(6.2)

a właściwie w nieujemnej części tej przestrzeni

$$\{\boldsymbol{\mu}^{+} = [|\mu_{1}^{-}|, \mu_{1}^{+}, |\mu_{2}^{-}|, \mu_{2}^{+}, \dots, |\mu_{n_{s}}^{-}|, \mu_{n_{s}}^{+}]||\mu_{i}^{-}|, \mu_{i}^{+} \in \mathbb{R}^{+}; i = 1 \dots n_{s}\}, \qquad (6.3)$$

co zostanie wyjaśnione w dalszej części pracy. Wektor  $\mu^+$  wyznacza wierzchołek  $2n_s$  wymiarowego prostopadłościanu (hiperprostopadłościanu)  $\Omega^+$ , czyli współrzędne obszaru zmienności obciążeń.

Analogicznie do definicji zamieszczonych w Rozdziale 2.2., zob. (2.13), wprowadzając mnożnik intensywności obciążenia  $\xi > 0$  homotetycznie powiększający hiperprostopadłościan  $\xi \Omega^+ = \Omega_{\xi}^+$ , można wyróżnić podobne obszary zmienności obciążeń: obszar porównawczy  $\Omega_1^+$ , obszar sprężysty  $\Omega_{\xi_e}^+$ , obszar przystosowania  $\Omega_{\eta}^+$  oraz obszar nośności granicznej  $\Omega_{\xi_l}^+$ . Na podkreślenie zasługuje fakt, że w przypadku występowania obciążeń, w których tylko jedna z granic jest niezerowa, przestrzeń granic mnożników obciążenia degeneruje się do przestrzeni mnożników obciążenia. Tylko wtedy można w przestrzeni mnożników obciążenia określić jednoznacznie obwiednię obszarów przystosowania. Wtedy również istnieje tylko jeden wektor, który określa współrzędne hiperprostopadłościanu (w przypadku zerowych dolnych granic zmian mnożników obciążenia,  $\mu_s^- = 0, s = 1 \dots n_s$ , zachodzi równość  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^+$ , Rysunek 6.1). Jeżeli jednak występuje obciążenie  $i, 1 \leq i \leq n_s$ ,



RYSUNEK 6.1. Obszary zmienności mnożników oraz granic mnożników obciążenia gdy  $\mu_1^-=\mu_2^-=0.$ 



RYSUNEK 6.2. Przypadek dwóch mnożników obciążenia i trzech granic zmienności obciążenia. Obszar zmienności mnożników obciążenia  $\Omega_{\xi}$  jest wyznaczony przez dwa wektory  $\xi \mu_a$  i  $\xi \mu_b$ , a obszar zmienności granic mnożników obciążenia  $\Omega_{\xi}^+$  jest wyznaczony przez jeden wektor  $\xi \mu^+$ .

które jest opisane przez dwie różne od zera granice mnożników obciążenia  $\mu_i^- < 0 < \mu_i^+$ , to współrzędne hiperprostopadłościanu w przestrzeni mnożników obciążenia są określone przez dwa wektory. W przestrzeni granic mnożników obciążenia współrzędne hiperprostopadłościanu są wyznaczone przez jeden wektor  $\mu^+$  (Rysunek 6.2), co jest kluczową korzyścią tego opisu w zagadnieniu rozważanym w niniejszej pracy.

Wobec powyższych ustaleń oraz dostępnych danych stochastycznych dotyczących zwykle maksymalnych wartości obciążenia, przyjęto następujące uproszczenia stochastycznego opisu obciążeń:

- obciążenie P jest zmienną losową niezależną od czasu (dlatego też analiza niezawodności również jest przeprowadzana niezależnie od czasu);
- dana realizacja p zmiennej losowej P odpowiada maksymalnej wartości obciążenia mogącego wystąpić w danym przedziale czasu, np. w przeciągu 10 lat (lub nawet w całym przewidywanym przedziale czasu pracy konstrukcji);
- do opisu obciążeń przyjęto rozkład prawdopodobieństwa Gumbela należący do grupy tzw. rozkładów maksimów I typu.

Konsekwentnie do oznaczeń przyjętych w Rozdziale 3., liczba zmiennych  $n = 2n_s$ . Obciążenia zgrupowane są w wektorze zmiennych losowych  $\boldsymbol{P} = [P_1, P_2, ..., P_n]$ . Przestrzeń realizacji  $\boldsymbol{p} = [p_1, p_2, ..., p_n]$  wektora  $\boldsymbol{P}$  jest równoważna przestrzeni granic zmienności mnożników obciążenia. Wobec tego przyjęto te same oznaczenia obszarów,  $\Omega_1^+, \Omega_{\xi_e}^+,$  $\Omega_{\eta}^+$  oraz  $\Omega_{\xi_l}^+$ . Miara prawdopodobieństwa wystąpienia danej realizacji  $\boldsymbol{p}$  jest określona przez funkcję łącznej gęstości prawdopodobieństwa obciążenia  $f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p})$ . Tak jak już wspomniano w Rozdziale 2 w analizie przystosowania historia obciążenia, jego zmiany w czasie oraz wzajemne interakcje obciążeń oddziaływujących na konstrukcję nie mają wpływu na jej końcowy stan przystosowania się. W analizie nośności granicznej, przy założeniu sztywno-plastycznego modelu materiału, wzrost obciążenia nie musi być zdeterminowany narzuconymi proporcjami. Obciążenie może dowolnie wzrastać aż do momentu, w którym osiągnie graniczną wartość. Wymaga podkreślenia fakt, że przyjęty opis obciążeń uniemożliwia badanie wpływu, mogącej mieć istotne znaczenie, historii obciążenia. Przyjęty opis stochastyczny jednak umożliwia analizę losowego charakteru obciążeń na bezpieczeństwo konstrukcji w danym okresie czasu.

Powyższe założenia dotyczące opisu stochastycznego obciążeń w rezultacie generują to samo sformułowanie zagadnienia niezawodności przystosowania oraz nośności granicznej konstrukcji. Jednak w analizie nośności granicznej konstrukcji taki opis obciążeń można stosować tylko w ograniczonym zakresie. Alternatywą takiego opisu obciążeń, w przypadku nośności granicznej konstrukcji, jest założenie proporcjonalnego narastania obciążenia oraz założenie opisu stochastycznego obciążeń w biegunowym układzie współrzędnych. Taki opis obciążeń umożliwiłby analizę w przypadku dowolnego kształtu powierzchni granicznej, lecz uniemożliwiłby zastosowanie proponowanej w niniejszej pracy metody powierzchni odpowiedzi. Ponadto, występują trudności interpretacyjne takiego opisu obciążeń.

### 6.2. Definicja niezawodności konstrukcji sprężysto– plastycznych

Zadanie niezawodności konstrukcji sprężysto–plastycznych, zob. (3.3), można sformułować w postaci

$$P_f = \mathbb{P}[\boldsymbol{P} \in \Omega_f] = \mathbb{P}[g(\boldsymbol{P}) \leqslant 0] = \int_{g(\boldsymbol{p}) \leqslant 0} f_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{p}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{p} \,. \tag{6.4}$$

w której obszar awarii  $\Omega_f$  jest zdeterminowany przez rodzaj prowadzonej analizy (przystosowania lub nośności granicznej). Konsekwentnie, zasada ta dotyczy określającej obszar awarii  $\Omega_f$  funkcji granicznej  $g(\mathbf{p})$ , która w analizie przystosowania oraz nośności granicznej ma szczególną postać

$$g^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}_{\mathcal{I}}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}.$$
(6.5)

Wyrażenie  $p_{\mathcal{I}}$  jest dopuszczalną wartością obciążenia jeszcze gwarantującego przystosowanie<sup>1)</sup>  $\mathcal{I} = SD$  lub obciążenia określającego nośność graniczną konstrukcji<sup>2)</sup>  $\mathcal{I} = LA$ , które są wyznaczane dla danej realizacji wektora p. Do wyznaczenia wartości  $p_{\mathcal{I}}$  *i*-tej realizacji wektora  $p_i$  metodą min-max wystarczy znajomość proporcji obciążenia

$$\boldsymbol{\lambda}_{i} = \frac{\boldsymbol{p}_{i}}{\parallel \boldsymbol{p}_{i} \parallel}, \qquad (6.6)$$

<sup>&</sup>lt;sup>1)</sup> Przystosowanie w języku angielskim jest określane terminem *Shakedown* (SD).

<sup>&</sup>lt;sup>2)</sup> Analiza nośności granicznej w języku angielskim jest określana terminem *Limit Analysis* (LA).

która określa kierunek przekątnej *i*–tego homotetycznie powiększanego hiperprostopadłościanu. Wyznaczony wektor  $p_{\mathcal{I}}(\lambda_i)$  określa wierzchołek hiperprostopadłościanu leżący na powierzchni granicznej

$$g^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}_{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p}_{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{p}.$$
 (6.7)

W związku z powyższym, nie istnieje konieczność poszukiwania położenia powierzchni granicznej  $g^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{p}) = 0$  w danym kierunku, ponieważ położenie tej powierzchni jest określone przez algorytm min–max. Jest to kluczowa zaleta niniejszego sformułowania, która nie występuje w ogólnym przypadku analizy niezawodności konstrukcji sprężysto plastycznych.

Interpretacja całki (6.4) jest następująca. W związku z przyjętą stochastyczną definicją obciążeń prawdopodobieństwo powstania *i*-tego obszaru obciążeń, w przypadku dwóch obciążeń (Rysunek 6.3), może być sformułowane następująco

$$\mathcal{R}_i = \mathbb{P}[P_1 < P_1^i(\boldsymbol{\lambda}_i) \land P_2 < P_2^i(\boldsymbol{\lambda}_i)].$$
(6.8)

Prawdopodobieństwo sumy wszystkich obszarów

$$\mathcal{R} = \mathbb{P}[(P_1 < P_1^1 \land P_2 < P_2^1) \cup (P_1 < P_1^2 \land P_2 < P_2^2) \cup ...]$$
(6.9)

określa niezawodność konstrukcji sprężysto–plastycznej. Tym samym całka (6.4) przedstawia sumę wszystkich realizacji wektora obciążeń  $\boldsymbol{P}$ , które nie zawierają się w obszarze ograniczonym powierzchnią graniczną (6.7).



RYSUNEK 6.3. Ilustracja graficzna zadania niezawodności z zaznaczeniem powierzchni granicznej oraz dwóch obszarów obciążeń.

Sformułowanie zadania niezawodności przystosowania konstrukcji ramowych w podejściu kinematycznym po raz pierwszy zostało przedstawione w pracy [15]. Ze względu na możliwość dokładnego wyróżnienia modów zniszczenia i odpowiadających im części obwiedni obszarów przystosowania w rozważanym zagadnieniu zaproponowano sumowanie prawdopodobieństw awarii odpowiadających reprezentatywnym dla danego modu zniszczenia kierunkom. Prawdopodobieństwo awarii odpowiadające danemu modowi zniszczenia zostało wyrażone za pomocą całki we współrzędnych biegunowych a prawdopodobieństwo awarii konstrukcji zostało określone za pomocą prawdopodobieństwa warunkowego.

W rozważanym w niniejszej pracy zagadnieniu niezawodności osiowo–symetrycznych konstrukcji sprężysto–plastycznych w podejściu statycznym nie można wyróżnić granic pomiędzy danymi modami zniszczenia.

### 6.3. Idea MPO w analizie niezawodności konstrukcji sprężysto–plastycznych

Idea powierzchni odpowiedzi dotyczy przypadku gdy:

- A. pierwsza pochodna powierzchni granicznej jest nieciągła;
- **B.** każdej realizacji wektora zmiennych losowych  $\boldsymbol{p}$  odpowiada dana realizacja na powierzchni granicznej  $g^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{p}) = 0;$
- C. obszar wyznaczony przez powierzchnię graniczną  $g^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{p}) = 0$  jest obszarem wypukłym, Rysunek 6.4;
- **D.** kierunek wektora prostopadłego do  $g^{\mathcal{I}}(\mathbf{p}) = 0$  należy do zbioru (6.3), Rysunek 6.4.

Nieciągłość pierwszej pochodnej powierzchni granicznej wynika z nakładania się w trakcie analizy programem CYCLONE błędów numerycznych oraz ze sposobu podziału na elementy skończone modelu konstrukcji (błędów generowanych przez zastosowaną procedurę optymalizacyjną). Podział dla zadanej deterministycznie geometrii jest stały i nie uwzględnia przebiegu rzeczywistej granicy pomiędzy odkształconą plastycznie i nieodkształconą częścią konstrukcji, chociaż granica ta zmienia się stosownie do proporcji obciążeń wyznaczających przystosowanie bądź nośność graniczną. Z powodu nieciągłości pierwszej pochodnej powierzchni granicznej nie jest możliwe zastosowanie algorytmów gradientowych analizy niezawodności. Z kolei inne, klasyczne metody analizy niezawodności nie wykorzystują niewątpliwej zalety, ad. B, oraz własności powierzchni granicznej, ad. C i D, tego typu zagadnienia. Z wypukłości obszaru wynika, że powierzchnia graniczna w ogólności może posiadać ujemną krzywiznę, lub może nawet nie posiadać wyróżnionego punktu projektowego (zastosowanie MPO FORM mogłoby prowadzić do poważnych błędów). Ten fakt z kolei wymusza przebadanie całego obszaru obciążeń o istotnej mierze prawdopodobieństwa  $f_{\mathbf{P}}(\mathbf{p})$ , zob. przykłady obwiedni rzeczywistych konstrukcji, Rysunek 6.21.

W analizie nośności granicznej konstrukcji powierzchnia graniczna  $g^{\xi_l}(\mathbf{p}) = 0$  jest wypukła, warunek **C**, lecz nie musi spełniać warunku **D**, Rysunek 6.4. W przypadku niespełnienia warunku **D**, homotetycznie powiększany hiperprostopadłościan najpierw osiągnie



RYSUNEK 6.4. Skrajne postacie powierzchni granicznej  $g^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{p}) = 0$  oraz przykład powierzchni nośności granicznej  $g^{\xi_l}(\boldsymbol{p}) = 0$ , która nie spełnia założenia **D**.

warunek nośności granicznej narożnikiem nie leżącym na kierunku głównej przekątnej hiperprostopadłościanu. W ramach opisu stochastycznego obciążeń taki obszar obciążeń oznacza awarię. Proponowana w niniejszej pracy MPO nie obejmuje analizy tej klasy zadań.

Proponowane rozwiązanie MPO bazuje na sposobie planowania symulacji wykorzystującym wypukłość obszaru granicznego w oryginalnej przestrzeni obciążeń.

Warunek wypukłości obszaru można zapisać następująco:

zbiór  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}^n$  jest wypukły jeżeli dwa dowolne wektory  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{C}$  dla dowolnego  $\theta \in [0, 1]$  spełniają następujący warunek

$$\theta \boldsymbol{p}_1 + (1-\theta) \boldsymbol{p}_2 \in \mathcal{C} . \tag{6.10}$$

Powyższy warunek oznacza, że wszystkie punkty tworzące odcinek  $\overline{p_1p_2}$  należą do zbioru C.

W tej przestrzeni dowolny odcinek, którego końce należą do powierzchni granicznej  $g(\mathbf{p}) = 0$  jest jednocześnie zbiorem bezpiecznych realizacji wektora  $\mathbf{p}$ . Niejawność powierzchni granicznej  $g(\mathbf{p}) = 0$  oznacza konieczność poszukiwania takich realizacji wektora  $\mathbf{p}$  należących do  $g(\mathbf{p}) = 0$ , których miara prawdopodobieństwa jest największa.

### Pierwszy krok: MPO w przestrzeni obciążeń

Symulacje na pierwszym kroku poszukiwań wykonywane są na bazie planu eksperymentu osiowego (przypadek n = 3, zob. 4.3), przy założeniu dużej odległości  $\delta$  pomiędzy ekspe-



RYSUNEK 6.5. Początkowa idea MPO w przestrzeni obciążeń.

rymentami (Rysunek 6.5, przypadek n = 2 - 1 ponieważ poszukiwana jest powierzchnia graniczna), określonej następująco

$$\delta = k_{\sigma}\sigma_c \qquad k_{\sigma} \in (2,3), \tag{6.11}$$

gdzie odchylenie  $\sigma_c$  jest normą euklidesową z wektora odchyleń standardowych zmiennych. Tak duża wartość  $\delta$  pozwala na wzięcie pod uwagę prawie całego istotnego dla wyników analizy obszaru. W przypadku występowania korelacji pomiędzy zmiennymi, odległości poszczególnych symulacji od punktu centralnego powinny być zróżnicowane i uwzględniać wielkość współczynnika korelacji. W niniejszej pracy rozważania ograniczono do przypadku zmiennych niezależnych.

Symulacje są planowane w obróconym układzie współrzędnych w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do kierunku wyznaczonego przez wektor wartości średnich  $\boldsymbol{p}_0$ , według planu osiowego dla n-1 wymiarów. Następnie, współrzędne zbioru symulacji są transformowane z obróconej przestrzeni  $\mathcal{P}^{\mathcal{R}}$  do oryginalnej przestrzeni zmiennych losowych  $\mathcal{P}$  $([(0, -\delta), (0, 0), (0, \delta)] \longrightarrow [\boldsymbol{p}_{i-1}, \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_i]$ , Rysunek 6.5). W wyznaczonych w ten sposób kierunkach poszukiwane są wartości mnożników obciążenia, które określają graniczną wartość obciążenia dla zadanego stosunku obciążeń, czyli punkty na powierzchni granicznej  $g(\xi \boldsymbol{p}) = 0$  ( $[\xi_{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}, \xi_0\boldsymbol{p}_0, \xi_i\boldsymbol{p}_i]$ , Rysunek 6.6).

Tak wygenerowany zbiór symulacji w przestrzeni  $\mathcal{P}$  jest wykorzystywany w następnym kroku do poszukiwania punktów najlepiej charakteryzujących rozpatrywane zagadnienie. Pierwotnie idea dalszej procedury MPO była następująca:



RYSUNEK 6.6. Początkowa idea MPO w przestrzeni obciążeń.

- 1) na prostej łączącej punkty  $\xi_0 \mathbf{p}_0$  oraz  $\xi_i \mathbf{p}_i$  znajdowany byłby punkt  $\mathbf{p}_{fi}$  o największej wartości funkcji łącznej gęstości prawdopodobieństwa  $f(\mathbf{p}_{fi})$ ;
- 2) odpowiadający temu punktowi stosunek obciążeń określałby kierunek  $p_{fi}$ , w którym wykonywana byłaby kolejna symulacja, czyli punkt  $\xi_{fi} p_{fi}$ ;
- 3) procedura wykorzystując sąsiednie punkty oraz nowowyznaczony punkt powtarzałaby się aż do uzyskania reprezentatywnego zbioru symulacji umożliwiającego aproksymację  $g(\mathbf{p}) = 0$ .

Podpunkty ad. 1 i ad. 2 należałoby kilkakrotnie powtórzyć w celu określenia położenia punktu  $g(\xi_{fi}\boldsymbol{p}_{fi}) = 0$  o największej wartości  $f(\xi_{fi}\boldsymbol{p}_{fi})$ . Poszukiwanie  $\boldsymbol{p}_{fi}$ , ad. 1, wymagałoby jednak zastosowania dodatkowej procedury. Natomiast w przypadku realizowania powyższej idei MPO w przestrzeni  $\mathcal{U}$ , współrzędne punktu  $\boldsymbol{u}^*$  na prostej łączącej punkty  $\boldsymbol{u}_0$  i  $\boldsymbol{u}_i$  można określić za pomocą jednego wzoru. Ponadto, dowolny odcinek po transformacji (zob. 3.1.1) do przestrzeni  $\mathcal{U}$  w większości przypadków ulega jedynie nieznacznemu zakrzywieniu. W skrajnym przypadku (rozkłady skośne, Rysunek 6.7), realizacji  $\boldsymbol{p}_{fi}$  w przestrzeni  $\mathcal{U}$  odpowiada punkt  $\boldsymbol{u}_{fi}$ , który nie określa maksymalnej wartości funkcji łącznej gęstości prawdopodobieństwa  $\varphi(\boldsymbol{u}_{fi})$  (w przypadku zmiennych niezależnych, zob. (3.12),  $f(\boldsymbol{p}_{fi}) \neq \varphi(\boldsymbol{u}_{fi})$  chociaż  $F(\boldsymbol{p}_{fi}) = \Phi(\boldsymbol{u}_{fi})$ ). Natomiast punkt  $\boldsymbol{u}^*$  określa maksymalną wartość funkcji łącznej gęstości prawdopodobieństwa awarii metodą FORM. Stąd, kierunek wyznaczony przez punkt  $\boldsymbol{u}^*$  został wybrany do poszukiwań rzeczywistego położenia powierzchni granicznej.



RYSUNEK 6.7. Przykład transformacji odcinka z przestrzeni obciążeń  $\mathcal{P}$  do przestrzeni  $\mathcal{U}$ oraz transformacji odwrotnej odcinka z  $\mathcal{U}$  do  $\mathcal{P}$ . Niezależne zmienne losowe  $P_1$  oraz  $P_2$ podlegają rozkładowi Weibull'a o łącznej gęstości prawdopodobieństwa  $f = f_{P_1}f_{P_2}$ , gdzie  $f_{P_i}(p_i) = a_i p_i^{(a_i-1)} exp(-(p_i/b_i)^{a_i})/b_i^{a_i}, p_i > 0, a > 0, b > 0$ . Funkcje  $f_{P_1}$  i  $f_{P_2}$  są określone parametrami o wartościach  $(a_1 = 5, b_1 = 3.5)$  i  $(a_2 = 1.5, b_2 = 2)$ .

### Drugi krok: MPO w przestrzeni $\mathcal{U}$

Idea drugiego kroku MPO jest przeniesieniem idei punktu  $p_{fi}$  z przestrzeni obciążeń  $\mathcal{P}$  do przestrzeni  $\mathcal{U}$  i poszukiwania punktu  $u^*$ . Dowolny odcinek w przestrzeni  $\mathcal{U}$  może być opisany za pomocą równania wektorowego prostej l postaci

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{r}t \; . \tag{6.12}$$

Zakładając, że prosta  $l_i$  jest wyznaczona przez dwa wektory  $\boldsymbol{u}_0$  oraz  $\boldsymbol{u}_i$ , można wyznaczyć jednostkowy wektor kierunkowy

$$\boldsymbol{r}_{i} = \frac{\boldsymbol{u}_{i} - \boldsymbol{u}_{0}}{\|\boldsymbol{u}_{i} - \boldsymbol{u}_{0}\|} \ . \tag{6.13}$$

Stąd równanie prostej  $l_i$ , która jest wyznaczona przez parę  $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_i$  można przedstawić następująco

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{r}_i t \;. \tag{6.14}$$

Parametr t w punktach odpowiadających końcom wektorów  $\boldsymbol{u}_0$  i  $\boldsymbol{u}_i$  przyjmuje odpowiednio wartości t = 0 oraz  $t = ||\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_0||$ . Natomiast wartość parametru  $t^*$  określająca współrzędne punktu  $\boldsymbol{u}^*$  na prostej  $l_i$  (Rysunek 6.7), może być wyznaczona z prostych zależności

$$\left. \begin{array}{c} \boldsymbol{r}_{i}t^{*} + \boldsymbol{u}_{0} = \boldsymbol{u}^{*} \\ \boldsymbol{r}_{i} \cdot \boldsymbol{r}_{i} = 1 \\ \boldsymbol{u}^{*} \cdot \boldsymbol{r}_{i} = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad t^{*} = -\boldsymbol{r}_{i} \cdot \boldsymbol{u}_{0}$$

$$(6.15)$$



RYSUNEK 6.8. Przykład odcinków w przestrzeni  $\mathcal{U}$  oraz

Punkt  $\boldsymbol{u}^*$  determinuje stosunek  $\boldsymbol{p}^*$ , czyli kierunek nowej symulacji w przestrzeni obciążeń. W proponowanej MPO przy poszukiwaniu  $\boldsymbol{u}^*$  brane są pod uwagę wszystkie odcinki łączące punkt centralny z punktami skrajnymi oraz wszystkie kombinacje pomiędzy punktami skrajnymi z wyłączeniem punktów przeciwległych, np. w n-1=2 wymiarach są  $N_c=4$  odcinki łączące punkt centralny z punktami skrajnymi oraz  $N_s=4$  odcinki wyznaczone przez same punkty skrajne, w n-1=3 wymiarach  $N_c=6$  a  $N_s=12$ , Rysunek 6.8. Liczba odcinków pomiędzy punktami planowanego eksperymentu osiowego, na których poszukiwany jest punkt projektowy  $\boldsymbol{u}^*$  znacznie wzrasta wraz ze wzrostem liczby zmiennych, Tabela 6.1. Symulacje nie muszą być jednak wykonywane w każdym wyznaczonym kierunku. Dwa odcinki wyznaczone przez punkt centralny i parę przeciwległych punktów wyznaczają tę samą hiperpłaszczyznę. Dany kierunek można pominąć w przypadku, gdy znaleziony na danym odcinku punkt  $\boldsymbol{u}^*$  jest w dużo większej odległości od początku układu współrzędnych w porównaniu z punktem wyznaczającym dany odcinek. Wokół znalezionych punktów najbliższych początkowi układu współrzędnych znowu wykonywane są symulacje na bazie planu eksperymentów osiowych z pomniejszoną ba-

n-1	Liczba odcinków wychodząca	Liczba odcinków
	ze skrajnego punktu	do sprawdzenia
1	1	2
2	3	8
3	5	18
n-1	2n - 3	$2(n-1)^2$

TABELA 6.1. Charakterystyka liczby odcinków oraz odpowiadającej tej liczbie ilości ewentualnych symulacji.

zą  $\delta$ . Po wyznaczeniu zbioru symulacji danym realizacjom przypisywane są wagi (zob. (5.3)), a powierzchnia graniczna jest aproksymowana za pomocą MNK według następującego równania

$$p_n(\boldsymbol{p}^{(n-1)}) = b_0 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \exp\left(c_i \frac{(p_i - p_{0i})}{\sigma_i}\right),\tag{6.16}$$

gdzie  $\mathbf{p}^{(n-1)} = [p_1, p_2, \dots, p_{n-1}]$ , zaś parametry  $b_0, \dots, b_{n-1}$  są wyznaczane dla ustalonego  $c_i$ . Najlepsze równanie regresji jest poszukiwane metodą przeszukiwania zbioru wartości  $c = [0.01n; n = 1, \dots, 200]$  i odpowiadających im wartości parametrów  $b_0, \dots, b_{n-1}$ . Kryterium wyboru najlepszego równania regresji stanowi statystyka  $R^2$ , zob. (4.13). Zaproponowane równanie (6.16) pozwala efektywniej odwzorować poszukiwaną zależność niż proponowane w pierwszej części niniejszej rozprawy równanie kwadratowe (4.29). Własności funkcji wykładniczej umożliwiają 'dopasowanie się' równania regresji do skrajnych przypadków powierzchni granicznej, Rysunek 6.4.

### 6.4. Przykłady

Przedstawiono poniżej dwa przykłady analizy niezawodności przystosowania oraz nośności granicznej z uwzględnieniem losowej natury obciążeń, za pomocą zaproponowanego algorytmu MPO. Pierwszy, prosty przykład analizy belki dwuprzęsłowej ilustruje złożoność zagadnienia oraz uzasadnia zastosowanie MPO. Zadanie wyznaczenia dokładnej postaci powierzchni granicznej zostało tutaj rozwiązane analitycznie. To rozwiązanie posłużyło do uzyskania MPO aproksymacji powierzchni granicznej. Ostatecznie, porównano wyniki oszacowania  $P_f$  na podstawie aproksymacji oraz analitycznej postaci powierzchni granicznej kilkoma metodami analizy niezawodności. Przykład ten prezentuje trudności jakie są związane z uzyskaniem rozwiązania nawet w przypadku tak prostej konstrukcji.

Drugi przykład dotyczy konstrukcji osiowo–symetrycznej, której rozwiązanie jest możliwe tylko w sposób przybliżony. Zadanie to zostało rozwiązane numerycznie za pomocą metody min–max. Nawet przy tak stosunkowo prostym modelu uzyskanie rozwiązania jest bardzo czasochłonne. Ponadto, rozwiązanie zadania procedurą min–max jest wrażliwe na przyjęty podział na elementy skończone, co w połączeniu z dużą ilością wykonywanych operacji i nakładaniu się błędów numerycznych powoduje nieciągłość pierwszej pochodnej powierzchni granicznej. MPO pozwala efektywnie uzyskać dobrą aproksymację powierzchni granicznej i na jej podstawie szacować prawdopodobieństwo awarii.

### 6.4.1. Przykład analizy niezawodności przystosowania oraz nośności granicznej belki

Analizowana jest belka<sup>3)</sup> pokazana na Rysunku 6.9 o przekroju idealnie dwuteowym (profil  $\perp$  bez środnika), który jest scharakteryzowany przez zadany moment bezwładności J oraz moment uplastyczniający przekrój  $M_0$ . Innymi słowy, dany przekrój poprzeczny

<sup>&</sup>lt;sup>3)</sup> Rozwiązanie deterministyczne w przypadku nieujemnego programu obciążeń o zadanym stosunku  $\lambda = 1$  można znaleźć w pracy [67].



RYSUNEK 6.9. Belka o przekroju idealnie dwuteowym.

belki pozostanie sprężysty gdy  $|M| < M_0$ , a przegub plastyczny powstanie gdy  $|M| = M_0$ . Przyrost odkształceń plastycznych w danym przekroju spowoduje obrót dwóch przeciwległych części belki, oś odkształcona belki stanie się łamaną. Przeguby plastyczne powstaną wyłącznie w przekrojach o maksymalnych wartościach momentu zginającego, w przekrojach [1], [2] lub [3].

Belka jest obciążona dwoma siłami  $p_1$  i  $p_2$ , które mogą zmieniać się wewnątrz zadanego obszaru zmienności określonego przez dwa nieujemne parametry s i t, np. obszar  $\{-s_1p \leq p_1 \leq p, 0 \leq p_2 \leq t_1p\}$  lub  $\{-s_2p \leq p_1 \leq p, 0 \leq p_2 \leq t_2p\}$ , Rysunek 6.10. Parametry te określają jednocześnie proporcje obszaru zmienności obciążeń  $\lambda_i$  (zob.



Rysunek 6.10. Obszar zmienności obciążeń.

rozdział 6). Analiza sprężysto–plastyczna belki (Rozdział 2) pozwala danemu obszarowi zmienności obciążeń, np.  $\{-s_1p \leq p_1 \leq p, 0 \leq p_2 \leq t_1p\}$ , przypisać wartość mnożnika obciążenia  $\mu$  proporcjonalnie powiększającego dany obszar do wielkości zapewniającej przystosowanie się (mnożnik  $\eta$ , Rysunek 6.10), bądź do wielkości obciążenia  $\xi_l$  określającej nośność graniczną.

### Przystosowanie

W analizie przystosowania konieczne jest wyznaczenie pola momentów resztkowych, które jest wynikiem powstałych odkształceń plastycznych. Można je wyznaczyć rozwiązując zadanie belki nieobciążonej, wstępnie odkształconej. Korzystając z symetrii zadania wystarczy rozwiązać dwa schematy I i II wstępnych obrotów w przekrojach odpowiednio 1 i 2, Rysunek 6.11.



RYSUNEK 6.11. Schemat wstępnych odkształceń: I w przekroju 1 oraz II w przekroju 2.

Z równania ugięcia osi belki

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EJ} , \qquad (6.17)$$

gdzie E oznacza moduł Younga oraz warunków brzegowych zadań

I: 
$$w(0) = w(l) = w(2l) = 0, [w(x)]_{x=l/2} = 0, \left[\frac{dw(x)}{dx}\right]_{x=l/2} = \theta_1, \left[\frac{dw(x)}{dx}\right]_{x=l} = 0,$$
  
II:  $w(0) = w(l) = w(2l) = 0, \left[\frac{dw(x)}{dx}\right]_{x=l/2} = 0, \left[\frac{dw(x)}{dx}\right]_{x=l} = \theta_2,$ 
(6.18)

gdzie  $[\cdot]$  oznacza skok wartości funkcji, zostały wyznaczone stałe całkowania oraz wyprowadzone wzory określające wielkości momentów rezydualnych

$$M_{2}^{R} = -\frac{3}{4} \frac{EJ}{l} (\theta_{1} + 2\theta_{2} + \theta_{3}),$$
  

$$M_{1}^{R} = M_{3}^{R} = -\frac{3}{8} \frac{EJ}{l} (\theta_{1} + 2\theta_{2} + \theta_{3}),$$
(6.19)

które są uzależnione od wielkości odkształceń plastycznych – kątów obrotu  $\theta_1, \theta_2$  i  $\theta_3$  odpowiednio w 1, 2 i 3 przekroju, Rysunek 6.9.

Rozwiązanie zadania idealnie sprężystego, czyli wartości momentów zginających w przekrojach  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$  i  $\boxed{3}$  dla poszczególnych programów obciążenia zostały zgrupowane w Tabeli 6.2.

Program obciążenia	$M_1$	$M_2$	$M_3$
$p_1 = p, \qquad p_2 = 0$	$\frac{13}{64}pl$	$-\frac{6}{64}pl$	$-\frac{3}{64}pl$
$p_1 = p, \qquad p_2 = tp$	$\frac{13-3t}{64}pl$	$-\frac{6(1+t)}{64}pl$	$\frac{13t-3}{64}pl$
$p_1 = -sp, \ p_2 = tp$	$-\frac{13s+3t}{64}pl$	$\frac{6(s-t)}{64}pl$	$\frac{13t+3s}{64}pl$
$p_1 = -sp,  p_2 = 0$	$-\frac{3s}{64}pl$	$\frac{6s}{64}pl$	$\frac{3s}{64}pl$

TABELA 6.2. Momenty zginające w odpowiednich przekrojach belki, Rysunek 6.9, dla danych wartości obciążenia, Rysunek 6.10.

Obciążenie działające na belkę musi spełnić gwarantujące bezpieczną pracę konstrukcji ograniczenia, które można wyznaczyć za pomocą bazującego na podejściu statycznym twierdzenia o przystosowaniu się ram przedstawionego poniżej<sup>4)</sup>.

Dana konstrukcja ramowa przystosuje się, jeżeli istnieje takie pole momentów resztkowych  $M^{R}(x)$ , że spełnione będą następujące nierówności

$$\max M(x) + M^{R}(x) \leq M_{0}(x),$$
  

$$-M_{0}(x) \leq \min M(x) + M^{R}(x),$$
  

$$\max M(x) - \min M(x) \leq 2M_{e}(x),$$
  
(6.20)

z których pierwsze dwie odnoszą się do nieprzystosowania zagrożonego zniszczeniem przyrostowym, a trzecia plastycznością naprzemienną.

Rozważania są więc ograniczone do maksymalnych i minimalnych momentów zginających analizy sprężystej. Ze zgromadzonych w Tabeli 6.2 wartości momentów sprężystych zostały wybrane momenty ekstremalne mogące pojawić się w danym przekroju belki i razem z wartościami momentów resztkowych zebrano je w Tabeli 6.3. Przytoczone twierdzenie

Ekstremum	$M_1$	$M_2$	$M_3$
max	$\frac{13}{64}pl$	$\frac{6s}{64}pl$	$\frac{3s+13t}{64}pl$
min	$-\frac{13s+3t}{64}pl$	$-\frac{6(1+t)}{64}pl$	$-\frac{3}{64}pl$
$M^R$	$\frac{1}{2}m$	m	$\frac{1}{2}m$

TABELA 6.3. Ekstremalne momenty zginające w odpowiednich przekrojach belki, Rysunek 6.9, dla danych granic zmienności obciążenia, Rysunek 6.10.

wraz z dwoma pierwszymi warunkami  $(6.20)^{5}$ , które muszą być spełnione dla odpowied-

 $<sup>^{(4)}</sup>$ Twierdzenie jest zamieszczone w rozdziale 6.3 pracy [67].  $M_e$ oznacza granicę sprężystości.

<sup>&</sup>lt;sup>5)</sup> Trzeci warunek jest spełniony tożsamościowo, ponieważ dla przekroju idealnie dwuteowego  $M_e = M_0$ .

nich wartości momentów z Tabeli 6.3 implikuje układ sześciu nierówności, Rysunek 6.12.



RYSUNEK 6.12. Rozwiązanie zadania przystosowania oraz zakres jego obowiązywania w przestrzeni parametrów sit.

Pięć z nich jest istotnych, tzn. najmniejszy możliwy mnożnik obciążenia  $\eta(s,t)$  spełnia jedną z tych nierówności. Zakres obowiązywania nierówności

a) 
$$\xi p \leq \frac{96}{16s + 3t} \frac{M_0}{l}$$
  
b)  $\xi p \leq \frac{8}{s + t} \frac{M_0}{l}$   
c)  $\xi p \leq \frac{96}{3(1 + s) + 16t} \frac{M_0}{l}$  (6.21)  
d)  $\xi p \leq \frac{128}{13(1 + s) + 3t} \frac{M_0}{l}$   
e)  $\xi p \leq \frac{96}{16 + 3t} \frac{M_0}{l}$ 

w przestrzeni parametrów s i t przedstawiono na Rysunku 6.12, który przestawia również rzut części 'widocznych od dołu' równań (6.21) na płaszczyznę  $\xi p = 0$ .

Nie jest możliwe przedstawienie obwiedni obszarów przystosowania w przestrzeni obciążeń  $[p_1, p_2]$  ze względu na niejednoznaczność wynikającą z możliwości występowania ujemnych wartości obciążenia  $p_1$ .

### Nośność Graniczna

W przypadku nośności granicznej konstrukcji belkowych wyniki uzyskane za pomocą podejścia statycznego oraz kinematycznego są takie same. Dana belka była analizowana metodą kinematyczną. Dla zadanego obszaru zmienności obciążeń, Rysunek 6.10, ze względu na symetrię zadania, rozwiązanie pięciu modów zniszczenia (pięciu kombinacji obciążenia) redukuje się do dwóch przypadków, Rysunek 6.13.



RYSUNEK 6.13. Podstawowe mody zniszczenia belki.

Praca sił zewnętrznych (moc), czyli praca jaką wykonuje dane obciążenie na przemieszczeniu w (prędkości przemieszczeń  $\dot{w}$ ) wynosi odpowiednio

A) 
$$\dot{L} = p_1 \dot{w} = p \dot{w},$$
 B)  $\dot{L} = (p_1 + p_2) \dot{w} = (s+1)p \dot{w},$  (6.22)

a praca sił wewnętrznych (moc), czyli energia jaka jest dysypowana w konstrukcji mierzona iloczynem momentu zginającego  $M_0$  i kąta obrotu osi belki  $\varphi$  w przegubie, w którym nastąpiło uplastycznienie przekroju wynosi

A) 
$$\dot{D} = M_0(\dot{\varphi}_1 - (-\dot{\varphi}_2)) = (4+2)\frac{\dot{w}M_0}{l} = \frac{6\dot{w}M_0}{l},$$
 (6.23)

B) 
$$\dot{D} = M_0(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) = (4+4)\frac{\dot{w}M_0}{l} = \frac{8\dot{w}M_0}{l}.$$
 (6.24)



RYSUNEK 6.14. Obwiednia nośności granicznej w przestrzeni obciążeń.

Z równania  $\dot{L} = \dot{D}$  można wyznaczyć obciążenie graniczne

A) 
$$p = \frac{6M_0}{l}$$
, B)  $p = \frac{8M_0}{(1+s)l}$  (6.25)

oraz obwiednię nośności granicznej, Rysunek 6.14.

### Niezawodność

W analizie niezawodności przystosowania oraz nośności granicznej belki przyjęto opis stochastyczny obciążeń zgodnie z założeniami podanymi w Rozdziale 6. Dodatkowo założono brak zależności pomiędzy zmiennymi. Granice zmienności obciążeń belki opisano trzema zmiennymi losowymi  $[P_1^+, P_1^-, P_2^+]$ , których parametry rozkładu zostały przedstawione w Tabeli 6.4. Takie sformułowanie zadania niezawodności pozwala na przedstawienie obwiedni obszarów przystosowania w przestrzeni granic zmienności obciążeń (w przestrzeni realizacji). Obwiednia, która jednocześnie jest powierzchnią graniczną, jest dana w postaci parametrycznej

$$[p_1^+, p_1^-, p_2^+] = [p, -sp, tp], \quad s, t = (0, \infty) , \qquad (6.26)$$

gdzie p = p(s,t) jest określone warunkami (6.21) obowiązującymi w odpowiadającym im zakresie, Rysunek 6.12. Powierzchnię (6.26) można przetransformować do przestrzeni granic zmienności obciążeń  $[p_1^+, p_1^-, p_2^+]$ , Rysunek 6.15, gdzie przyjmuje następującą postać

a) 
$$g_a = 16p_1^- - 3p_2^+ + 96 = 0$$
,  
b)  $g_b = p_1^- - p_2^+ + 8 = 0$ ,  
c)  $g_c = -3p_1^+ + 3p_1^- - 16p_2^+ + 96 = 0$ ,  
d)  $g_d = -13p_1^+ + 13p_1^- - 3p_2^+ + 128 = 0$ ,  
e)  $g_e = -16p_1^+ - 3p_2^+ + 96 = 0$ .  
(6.27)

Powierzchnia graniczna w postaci parametrycznej (6.26) opisuje zależność odcinkami liniową co łatwo sprawdzić podstawiając do równań (6.27) odpowiednie wartości p dane zależnościami (6.21). Obwiednia nośności granicznej w przestrzeni granic zmienności obciążeń, Rysunek 6.15, jest wynikiem przecięcia dwóch graniastosłupów, których kontury zostały wyznaczone w przestrzeni obciążeń, Rysunek 6.14. Powierzchnia ta ma następu-

Zmienna	$\mu$	σ	Typ rozkładu
$P_1^+$	3.2	0.40	Gumbel
$P_{1}^{-}$	2.8	0.28	Gumbel
$P_2^+$	3.0	0.30	Gumbel

TABELA 6.4. Opis zmiennych losowych.


RYSUNEK 6.15. Obwiednie obszarów przystosowania i nośności granicznej w przestrzeni granic obciążeń oraz warstwica funkcji łącznej gęstości prawdopodobieństwa  $f_P(\mathbf{p})$ .

jącą postać

k) 
$$g_k = p_1^- - p_2^+ + 8 = 0$$
,  
l)  $g_l = -p_2^+ + 6 = 0$ ,  
m)  $g_m = p_1^- + 6 = 0$ ,  
n)  $g_n = -p_1^+ + 6 = 0$ .  
(6.28)

Punkt na tej powierzchni (maksymalna wartość obciążenia występującego w danym okresie czasu) definiuje obszar, w którym obciążenie może dowolnie przyrastać bez kumulowania przyrostów odkształceń plastycznych i osiąga nośność graniczną spełniając jeden z powyższych warunków (6.28).

MPO umożliwia wyznaczenie aproksymacji obwiedni obszarów przystosowania przy liczbie symulacji  ${\cal N}=43$ następującej postaci

$$\hat{g}(\boldsymbol{p}) = 5.33 - 0.00098 \exp\left[1.35\left(\frac{p_1^+ - 3.2}{0.40}\right)\right] - 0.49 \exp\left[0.21\left(\frac{p_1^- - 2.8}{0.28}\right)\right] - p_2^+ = 0,$$
(6.29)



RYSUNEK 6.16. Aproksymacja obwiedni obszarów przystosowania (SD) i nośności granicznej (LA) w przestrzeni granic obciążeń oraz zbiory symulacji, które posłużyły do wyznaczenia powyższych aproksymacji.

oraz obwiedni nośności granicznej przy N = 45 w postaci

$$\hat{g}(\boldsymbol{p}) = 32.03 - 0.00038 \exp\left[1.26\left(\frac{p_1^+ - 3.2}{0.40}\right)\right] - 26.85 \exp\left[0.01\left(\frac{p_1^- - 2.8}{0.28}\right)\right] - p_2^+ = 0.$$
(6.30)

Funkcje (6.29) i (6.30) są dane jawnie (Rysunek 6.16), co pozwala zastosować odpowiednią metodę analizy niezawodności bez ograniczeń związanych z liczbą symulacji potrzebnych do oszacowania  $P_f$ .

Analiza niezawodności została przeprowadzona kilkoma metodami w celu porównania dokładności uzyskanych wyników oraz liczby symulacji N potrzebnych do ich uzyskania. Wyniki uzyskane metodą Monte Carlo (współczynnik zmienności estymatora  $\nu_{\hat{P}_f} \approx 5\%$ , zob. (3.51)) przyjęto jako punkt odniesienia w stosunku do innych metod oraz do porównania wyników uzyskanych za pomocą aproksymacji powierzchni granicznej MPO, Tabela 6.5. Powyższa tabela nie zawiera wyników analizy badanego zagadnienia jako analizy niezawodności systemu, ponieważ tylko w tym szczególnym przypadku dane są

	Rzeczywiste obwiednie				MPO			
Metoda	SD		LA		SD		LA	
	$\beta$	N	$\beta$	N	$\beta$	N	$\beta$	N
Monte Carlo	3.154	1000000	3.433	1000000	3.147	43	3.425	45
Advanced Monte Carlo	3.412	7000	3.507	7000	3.361	43	3.520	45
FORM	4.010	57	3.702	45	3.509	43	3.704	45

TABELA 6.5. Rezultaty analizy niezawodności przystosowania (SD) oraz nośności granicznej (LA) belki dwuprzęsłowej. Analizę przeprowadzono na podstawie rzeczywistych obwiedni i ich aproksymacji (MPO).

jawnie warunki (6.27) i (6.28). W ogólności ich wyznaczenie nawet dla belek jest bardzo trudne i czasochłonne, a przedstawiony powyżej sposób wyznaczania analitycznych równań obwiedni nie nadaje się do inżynierskiego zastosowania. Kolejnym problemem jest wyznaczenie granic obowiązywania związków (6.27) i (6.28). Ponadto, po transformacji do standardowej przestrzeni gaussowskiej warunki (6.27) i (6.28) przestają być liniowe, Rysunek 6.7, a oszacowanie prawdopodobieństwa awarii dla pojedynczego warunku staje się kosztowne, oszacowanie FORM w Tabeli 6.5. Kluczowym argumentem przemawiającym za zastosowaniem MPO w analizie niezawodności konstrukcji sprężysto–plastycznych jest istnienie metody min–max (Rozdział 2) pozwalającej wyznaczyć wartość mnożnika obciążenia określającego obciążenie przystosowania bądź nośności granicznej konstrukcji przy zadanej realizacji wektora zmiennych losowych, zbiór symulacji na Rysunku 6.16.

## 6.4.2. Przykład analizy niezawodności przystosowania oraz nośności granicznej zadania osiowo–symetrycznego

Konstrukcja o zadanej geometrii, Rysunek 6.17, została obciążona ciśnieniem wewnętrznym  $P_1$  oraz obciążeniem powierzchniowym  $P_2$  – niezależnymi zmiennymi losowymi o parametrach rozkładu przedstawionych w Tabeli 6.6.



RYSUNEK 6.17. Schemat geometrii analizowanego zadania osiowo-symetrycznego.

Zmienna	$\mu$ [MPa]	$\sigma \; [\mathrm{MPa}]$	Typ rozkładu
$P_1$	150.0	3.0	Gumbel
$P_2$	12.0	1.2	Gumbel

TABELA 6.6. Opis zmiennych losowych.

Dodatkowo został przebadany wpływ zmiany zewnętrznego promienia rury  $R_2 = 25, 26, 27 \,\mathrm{mm}$  na wielkość  $P_f$  przy ustalonym promieniu wewnętrznym  $R_1 = 12 \,\mathrm{mm}$ . Przyjęto warunek plastyczności Hubera–Misesa oraz granicę plastyczności  $\sigma_0 = 200 \,\mathrm{MPa}$ .

Analizę przystosowania oraz nośności granicznej przeprowadzono programem CYCLONE. Program wykorzystuje rozwiązanie sprężyste MES uzyskiwane programem FEMLIB<sup>6</sup>), w którym model numeryczny jest generowany za pomocą elementu CST (trójkąt o liniowej funkcji kształtu). CYCLONE pozwala wyznaczyć metodą min-max wartość mnożnika obciążenia zapewniającego przystosowanie  $\eta$  bądź określającego nośność graniczną konstrukcji  $\xi_l$ , Rozdział 2. zob. (2.43 i 2.44).

W obydwu przypadkach MES służy do wyznaczenia stanu naprężenia, w tym maksymalnej wartości naprężenia  $\sigma_{zred}^{max}(\sigma_{max}^{E})$  dla danej porównawczej wielkości obciążenia  $\boldsymbol{p}_{0}$ . Poszukiwaną wielkość obciążenia przystosowania  $\boldsymbol{p}_{SD}$  można wyznaczyć z zależności

$$p_{SD} = \eta p_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_{zred}} p_0 \,, \tag{6.31}$$

$$\sigma_{zred} = \frac{1}{\eta} \sigma_{zred}^{max} \,. \tag{6.32}$$

Po podstawieniu (6.32) do związku (6.31) powstanie zależność

$$p_{SD} = \frac{\eta \sigma_0 p_0}{\sigma_{zred}^{max}},\tag{6.33}$$

która określa wielkość obciążenia przystosowania pojedynczej symulacji w zależności od danych zadania ( $\sigma_0, p_0$ ) oraz danych pochodzących z analizy MES i CYCLONE ( $\eta, \sigma_{zred}^{max}$ ). Podobna do (6.33) zależność została wykorzystana do wyznaczania wielkości obciążenia nośności granicznej  $p_{LA}$ 

$$p_{LA} = \xi_l p_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_{zred}} p_0 = \frac{\xi_l \sigma_0 p_0}{\sigma_{zred}^{max}}.$$
(6.34)

Chociaż brane są pod uwagę tylko maksymalna wartość intensywności naprężeń  $\sigma_{zred}^{max}$  oraz mnożnik obciążenia będący rezultatem redukcji  $\sigma_{zred}^{max}$  do wartości  $\sigma_{zred}$ , to reprezentują one stan naprężenia w całej konstrukcji, Rysunek 6.18. Analiza przystosowania oraz nośności granicznej jest bardzo czasochłonna w porównaniu do zadania MES. W powyższym przykładzie czas potrzebny do otrzymania zadanej zbieżności, bądź minimalnej wielkości perturbacji odkształceń plastycznych kończących działanie programu CYCLONE, wynosi nawet 40 min. (komputer z procesorem PENTIUM IV 1.8GHz, 1GB RAM).

<sup>&</sup>lt;sup>6)</sup> Program metody elementów skończonych FEMLIB autorstwa P. Tauzowskiego, zob. [113]



RYSUNEK 6.18. Podział na elementy skończone oraz pola intensywności naprężeń przystosowania (SD) i nośności granicznej (LA) [MPa].

Przy użyciu MPO uzyskano następujące aproksymacje funkcji granicznych przystosowania (SD) oraz nośności granicznej (LA) trzech wartości promienia zewnętrznego  $R_2$ 

SD25) 
$$g_{SD25} = 17.98 - 0.038 \exp\left[0.7\left(\frac{p_1 - 150.0}{3.0}\right)\right] - p_2 = 0,$$
 (6.35)

LA25) 
$$g_{LA25} = 38.42 - 15.05 \exp\left[0.07 \left(\frac{p_1 - 150.0}{3.0}\right)\right] - p_2 = 0,$$
 (6.36)

SD26) 
$$g_{SD26} = 19.82 - 0.0125 \exp\left[0.75\left(\frac{p_1 - 150.0}{3.0}\right)\right] - p_2 = 0,$$
 (6.37)

LA26) 
$$g_{LA26} = 34.18 - 5.44 \exp\left[0.11\left(\frac{p_1 - 150.0}{3.0}\right)\right] - p_2 = 0,$$
 (6.38)

SD27) 
$$g_{SD27} = 652.1 - 573.3 \exp\left[0.01\left(\frac{p_1 - 150.0}{3.0}\right)\right] - p_2 = 0,$$
 (6.39)

LA27) 
$$g_{LA27} = 124.2 - 0.19 \exp\left[0.02\left(\frac{p_1 - 150.0}{3.0}\right)\right] - p_2 = 0.$$
 (6.40)

Wyniki ( $R_2 = 26 \text{ mm}$ ) przeprowadzonej analizy zostały przedstawione na Rysunku 6.20, gdzie punktami zaznaczono wyniki pojedynczych symulacji. Ponadto zaznaczono wartości średnie zmiennych losowych oraz warstwice funkcji łącznej gęstości prawdopodobieństwa



RYSUNEK 6.19. Wyniki analizy niezawodności przystosowania i nośności granicznej.

zmiennych. Z Rysunku 6.20 wynika, że obydwie obwiednie mają nieciągłe pierwsze pochodne. Ponadto na przykładzie obwiedni SD widać, że może być ona istotna w dwóch regionach i w obydwu jakość aproksymacji powinna być podobna. MPO pozwala wyznaczyć za pomocą  $11 \div 13$  symulacji taką aproksymację, która wystarczy do dobrego oszacowania prawdopodobieństwa awarii.

Podobnie jest w przypadku pozostałych dwóch średnic  $R_2 = 25,27$  mm, Rysunek 6.21. Niewielka liczba symulacji (8 ÷ 13) wystarczy do znalezienia dobrej aproksymacji tylko istotnych części obwiedni.

Wyniki analizy niezawodności przystosowania i nośności granicznej zostały przedstawione na Rysunku 6.19, który zarazem może posłużyć do wyboru takiej wartości promienia  $R_2$ , aby zaprojektowana konstrukcja charakteryzowała się żądaną wielkością wskaźnika niezawodności  $\beta$ . Przedstawiona zależność ukazuje również mały wpływ promienia  $R_2$  w zakresie stosowanych w rzeczywistości tolerancji wykonania tego typu konstrukcji (±0.01 mm) na wartość wskaźnika  $\beta$ .



RYSUNEK 6.20. Rura (Rysunek 6.17) o średnicy  $R_2 = 26 \text{ mm.}$  Obwiednia obszarów przystosowania (SD) i nośności granicznej (LA) oraz ich aproksymacje w przestrzeni obciążeń [MPa].



RYSUNEK 6.21. Rury (Rysunek 6.17) o średnicach  $R_2 = 25, 27 \,\mathrm{mm}$ . Obwiednie obszarów przystosowania (SD) i nośności granicznej (LA) oraz ich aproksymacje w przestrzeni obciążeń [MPa].

## ROZDZIAŁ 7

## Wnioski

Rozważania podjęte w niniejszej pracy obejmowały dwa zagadnienia. Pierwszym z nich była analiza niezawodności konstrukcji za pomocą metody powierzchni odpowiedzi (MPO). Analizowano znaną ideę adaptacyjnej metody powierzchni odpowiedzi opracowaną zgodnie z pomysłem R.Rackwitza, zob. [91], która została uzupełniona o szereg nowych, następujących usprawnień:

- 1. Poszukiwanie punktu centralnego w MPO jest realizowane za pomocą planu osiowego przy liniowo zmniejszającej się bazie.
- 2. Obrót przestrzeni  $\mathcal{U}$  tak, aby jedna z osi pokrywała się z kierunkiem wyznaczonym przez wektor prostopadły do funkcji granicznej w punkcie centralnym. Operacja ta pozwala lepiej dopasować wielomian aproksymujący do rzeczywistego kształtu funkcji granicznej w pobliżu jej przecięcia  $G(\boldsymbol{u}^*) = 0$ .
- 3. Zastosowanie metody najmniejszej sumy ważonej kwadratów, która poprzez przypisanie wag pozwala zapewnić właściwy kształt powierzchni odpowiedzi. Zaproponowana funkcja przypisuje wagi wybranym eksperymentom stosownie do wartości funkcji granicznej oraz odległości danego punktu od początku układu współrzędnych.
- 4. Sferyczne kryterium wyboru pozwala wyszczególnić zbiór takich eksperymentów, które znajdują się w otoczeniu punktu centralnego i powtórnie wykorzystać informację o funkcji granicznej zawartą w tym zbiorze.
- 5. Zastosowanie ogólnego rozwiązania zadania regresji metodą SVD na drugim etapie MPO. To rozwiązanie umożliwia wykorzystanie istotnych informacji uzyskanych w trakcie pierwszego etapu MPO oraz informacji uzyskanych z dodatkowo zaplanowanego zbioru eksperymentów na drugim etapie. Zbiór dodatkowych eksperymentów jest planowany za pomocą statystyki  $R^2$ , która służy do wyboru zbioru

istotnych współczynników drugiego stopnia w równaniu regresji. Procedura jest realizowana w podprzestrzeni przestrzeni  $\mathcal{U}$  lub  $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$  na bazie nowych strategii planowania eksperymentów.

- Aproksymacja metody SORM.
- Połączenie osiowego i czynnikowego planu eksperymentów.
- Poszerzony o plan eksperymentów osiowych plan czynnikowy dwuwartościowy (CCD) ograniczony do założonego wymiaru podprzestrzeni.

Odmiennym rozwiązaniem jest uwzględnianie wszystkich eksperymentów z otoczenia aktualnego punktu centralnego w liniowej aproksymacji funkcji granicznej na każdym kroku pierwszego etapu MPO. Ten etap MPO jest realizowany za pomocą dwóch planów eksperymentów, podstawowy MPONP oraz osiowy MPONP2. Kryterium zbieżności jest nałożone na współrzędne gradientów poprzedniej i bieżącej aproksymacji funkcji granicznej. To rozwiązanie zostało opracowane dla przypadku nieciągłej pierwszej pochodnej funkcji granicznej.

Przeprowadzono szereg testów proponowanych rozwiązań. Z analizy rezultatów wynikają następujące wnioski dotyczące analizy niezawodności przy użyciu MPO, pośrednio będące konsekwencją ogólnych cech zagadnienia analizy regresji.

- 1. Zbieżność algorytmu poszukiwania punktu centralnego pierwszego etapu MPO do rzeczywistego lokalnego minimum nie jest zagwarantowana. W przypadku braku ciągłości pierwszej pochodnej funkcji granicznej takie minimum może w ogólności być nieosiągalne. MPO umożliwia znalezienie aproksymacji funkcji granicznej oraz lokalizację punktu odpowiadającego punktowi projektowemu.
- 2. Końcowa aproksymacja drugiego etapu MPO w ogólności może wcale nie odzwierciedlać poszukiwanej relacji. Ponadto, najmniejszy błąd aproksymacji jest w otoczeniu wartości średnich zmiennych wyznaczonych na podstawie zbioru eksperymentów, które biorą udział w analizie regresji.
- 3. Wartości parametrów sterujących algorytmem MPO wpływają na otrzymywany wynik zarówno lokalizacji punktu centralnego jak i oszacowania prawdopodobieństwa awarii uwzględniającej efekty drugiego stopnia. Błąd jest tym większy im bardziej jest złożona postać funkcji granicznej.
- 4. Zwiększanie liczby eksperymentów drugiego etapu nie poprawia wyniku, ponieważ rozwiązanie jest zdeterminowane przyjętą klasą funkcji bazowych.
- 5. MPO pozwala uzyskać dobre oszacowanie prawdopodobieństwa awarii w przypadku gdy funkcja graniczna posiada wyraźną lokalizację tylko jednego punktu projektowego (także gdy aproksymacja MPO dotyczy przypadku braku ciągłości pierwszej pochodnej funkcji granicznej), funkcja graniczna jest np. hiperparaboloidą.
- 6. W porównaniu do metody FORM (SORM), przy podobnej ilości wywołań wartości funkcji granicznej, MPO dostarcza informacji o funkcji granicznej z obszaru wokół punktu projektowego wraz z oceną jakości aproksymacji.
- 7. MPO umożliwia oszacowanie prawdopodobieństwa awarii w przypadku nieciągłej pierwszej pochodnej funkcji granicznej, gdy nie można zastosować metod gradien-

towych. W przypadku małej liczby zmiennych (mniej niż 10) czas obliczeń jest znacznie krótszy niż w przypadku metod symulacyjnych. Metoda MPONP (oraz MPONP2) została zastosowana do analizy niezawodności procesu głębokiego tłoczenia blachy aluminiowej.

8. MPO warto stosować w przypadku znanego charakteru funkcji granicznej.

Drugim z rozważanych zagadnień była analiza niezawodności konstrukcji sprężystoplastycznych za pomocą metody powierzchni odpowiedzi. Zadanie zostało ograniczone do badania wpływu losowej natury jedynie obciążeń. Opis stochastyczny obciążeń został uproszczony konsekwentnie do założeń klasycznej teorii przystosowania. Przyjęto niezależny od czasu opis tzw. rozkładem maksimów (np. rozkład Gumbela) Ponadto, po raz pierwszy sformułowano zadanie niezawodności przystosowania korzystając z definicji przestrzeni granic mnożników obciążenia, zob. [26]. Taki model obciążenia można również wykorzystać do analizy niezawodności nośności granicznej określonej klasy zadań, Rozdział 6.3.

Dosyć szczególne własności powierzchni granicznej przystosowania (oraz pewnej klasy zadań nośności granicznej) pozwoliły na opracowanie nowatorskiego algorytmu MPO do analizy niezawodności, na podstawie którego powstał efektywny system do obliczeń numerycznych zadań spotykanych w praktyce inżynierskiej. Przeprowadzono szereg testów proponowanego rozwiązania. Ze zdobytych doświadczeń oraz rozważań zawartych w tej części niniejszej pracy wynikają zamieszczone poniżej wnioski:

- 1. MPO pozwala uzyskać globalną reprezentację zachowania się konstrukcji ze szczególnym uwzględnieniem regionów o istotnej wartości funkcji łącznej gęstości prawdopodobieństwa awarii. Dotychczas stosowane efektywne metody analizy niezawodności umożliwiają znalezienie jednej aproksymacji o lokalnym zasięgu.
- 2. MPO może być stosowana zarówno w przypadku ciągłości oraz braku ciągłości pierwszej pochodnej funkcji granicznej.
- 3. MPO nadaje się do analizy zadań o niewielkiej liczbie zmiennych. Na obecnym poziomie mocy obliczeniowej komputerów Złożoność analizy konstrukcji sprężysto– plastycznych uniemożliwia efektywne rozwiązywanie praktycznych zadań o dużej liczbie zmiennych losowych.

Przeprowadzona analiza rozważanych w niniejszej pracy zagadnień ukazuje możliwość podjęcia w przyszłości następujących tematów badań:

- 1. Rozważenie możliwości stworzenia systemu eksperckiego, który w trakcie analizy mógłby rozpoznawać typ funkcji granicznej i szacować prawdopodobieństwo awarii najbardziej efektywną metodą.
- 2. Analiza niezawodności konstrukcji sprężysto–plastycznych przy założeniu losowej natury dowolnych parametrów a nie tylko obciążeń.
- 3. Optymalizacja niezawodnościowa konstrukcji sprężysto-plastycznych.
- 4. Definicja stochastycznego opisu obciążeń w analizie nośności granicznej.

- 5. Generowanie siatki elementów skończonych z uwzględnieniem zarówno jakości rozwiązania zadania sprężystego jak i jakości rozwiązania zadania min–max.
- 6. Uwzględnienie dodatkowych informacji, np. takich jak zależność zmiennych czy też wielkość współczynnika korelacji, w planowaniu strategii pierwszego oraz następnych kroków w analizie niezawodności konstrukcji sprężysto–plastycznych przy użyciu powierzchni odpowiedzi.

## Literatura

- 1. T. Abdo, R. Rackwitz. *Reliability of uncertain structural systems*. w: *Proc. Finite Elements in Engineering Applications*, 161–176, Stuttgart, 1990. INTES GmbH.
- S. Adhikari. Reliability Analysis Using Parabolic Failure Surface Approximation. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, provisionally accepted, http://www.aer.bris.ac.uk/contact/academic/adhikari/hpage/fulltext/ft27.pdf, 2003.
- 3. J.S. Arora. Introduction to Optimum Design. McGraw-Hill, 1989.
- G. Augusti, A. Baratta. Limit and shakedown analysis of structures with stochastic strengths. Second SMiRT Conference, Berlin, paper M7/8, 1973.
- 5. G. Augusti, A. Baratta. *Plastic shakedown of structures with stochastic local strengths*. IABSE, Symp. Resistance Ultimate Deformability of Structures, Lisbon, 1973.
- G. Augusti, A. Baratta, F. Casciati. Probabilistic Methods in Structural Engineering. Chapman and Hall, 1984.
- 7. H. Bleich. Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahlwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes. Bauingenieur, 13:261–267, 1932.
- A. Borkowski. Statyczna analiza układów prętowych w zakresach sprężystym i plastycznym. PWN, Warszawa-Poznań, 1985.
- A. Borkowski, M. Kleiber. On a numerical approach to shakedown analysis of structures. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 22:101–119, 1980.
- 10. A. Borkowski, A. Sawczuk. Nośność graniczna i optymalizacja plastycznych konstrukcji prętowych. Arkady, Warszawa, 1984.
- K. Breitung. Asymptotic approximations for multinormal integrals. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 110:357–366, 1984.
- 12. C.G. Bucher, U. Bourgund. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. Structural Safety, 7:57–66, 1990.

- 13. COMREL-TI: User's manual. RCP GmbH, Barrer Strasse 48, Munich, Germany, 1992.
- 14. C.A. Cornell. A probability-based structural code. Journal of American Concrete Institute, 66:974–985, 1969.
- R.B. Corotis, A.M. Nafday. Structural systems reliability using linear programming and simulation. J.Struct.Eng., ASCE 115, 10:2435–2447, 1989.
- 16. A.A. Cyras. Metody linejnogo programmirovanija pri rasčete uprugo-plastičeskich sistem. Strojizdat, Leningrad, 1969.
- 17. H.J. Dagher, Q. Lu, A.H. Peyrot. *Reliability of transmission structures including nonlinear effects.* Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 124:966–973, 1998.
- A. Der Kiureghian. Measures of structural safety under imperfect states of knowledge. Journal of Structural Engineering, ASCE, 115:1119–1140, 1989.
- A. Der Kiureghian, T. Dakessian. Multiple design points in first and second-order reliability. Structural Safety, 20:37–49, 1998.
- A. Der Kiureghian, H.-Z. Lin, S.-J. Hwang. Second-order reliability approximations. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 113:1208–1225, 1987.
- 21. A. Der Kiureghian, P.-L. Liu. Structural reliability under incomplete probability information. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 112:85–104, 1986.
- 22. O. Ditlevsen. Structural reliability codes for probabilistic design a debate paper based on elementary reliability and decision analysis concepts. Structural Safety, 19:253–270, 1997.
- 23. K. Doliński. First-order second-moment approximation in reliability of structural systems: critical review and alternative approach. Structural Safety, 1:211–231, 1983.
- 24. K. Doliński. Importance sampling techniques in reliability calculations. Prace IPPT, 37, 1988.
- 25. K. Doliński. Stochastyczny model wzrostu szczeliny zmęczeniowej. Prace IPPT, 43, 1992.
- 26. K. Doliński, J. Knabel. Reliability-oriented shakedown formulation. w: G. Augusti, G.I. Schueller, M. Ciampoli (eds.), Proc. Safety and Reliability of Engineering Systems and Structures, ICOSSAR 2005 Rome, 19-23 June, 401–401, 8 pages on CD. Millpress, Rotterdam, Netherlands, 2005.
- 27. N. Draper, H. Smith. Applied Repression Analysis. Wiley, New York, 1998.
- D.C. Drucker. A more fundamental approach to stress strain relations. In. Proc. First U.S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, 487–491, 1951.
- 29. M. Dudziak, A. Seweryn, M. Siemieniuk, J. Zwoliński. Analiza elementów konstrukcyjnych metodami nośności granicznej. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 1995.

- K. El-Tawil, M. Lemaire, J.-P. Muzeau. Reliability method to solve mechanical problems with implicit limit states. w: R. Rackwitz, P. Thoft-Christensen (eds.), Reliability and Optimization of Structural Systems '91, Proc. 4th IFIP WG 7.5 Conf., Munich, 11–13 September 1991, 181–190. Springer-Verlag, 1992.
- S. Engelund, R. Rackwitz. Experiences with experimental design schemes for failure surface estimation and reliability. w: Proceedings of the Sixth ASCE Speciality Conference on Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability, Denver, 8-10 July 1992, 252–255, 1992.
- L. Faravelli. Response surface approach for reliability analysis. J. of Engng. Mech., 115, 1989.
- L. Faravelli. Structural Reliability via Response Surface. w: N. Bellomo, F. Casciati (eds.), Nonlinear Stochastic Mechanics, IUTAM Symposium Turin. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- L. Faravelli, K. Breitung. Log-Likelihood Maximization and Response Surface in Reliability Assessment. Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, Nonlinear Dynamics, 5:273–285, 1994.
- B. Fiessler, H.-J Neumann, R. Rackwitz. *Quadratic limit states in structural reliability*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 105:661–676, 1979.
- 36. MA. Fisz. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, 1967.
- 37. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski. Metody Numeryczne. WNT, 1993.
- 38. A.M. Freudenthal. Safety and probability of structural failure. Transactions, ASCE, 121:1337–1375, 1956.
- M. Fujita, R. Rackwitz. Updating First- and Second-Order Reliability Estimates by Importance Sampling. w: Proc. of Japan Society of Civil Engineers No. 392/I-9, 53-59. Structural Eng./Earthquake Eng. 5, 1, 1988.
- 40. N. Gayton, J.M. Bourinet, M. Lemaire. A new tool for response surface approach of structural reliability. w: Reliability and Optimization of Structural Systems, Proc. 9th IFIP WG 7.5 Working Conference. The University of Michigan, Ann Arbor, 2000.
- 41. P.E. Gill, W. Murray, M.H. Wright. Practical Optimization. Academic Press, 1981.
- 42. D.A. Gokhfeld. Nesuščaja sposobnosť konstrukcij v uslovijach templosmen. Mašinostroenie, Moskva, 1970.
- 43. R.V. Grandhi, L. Wang. *Higher-order failure probability calculation using nonlinear approximation*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 168:185–206, 1999.
- 44. R.T. Haftka, Z. Gürdal. Elements of Structural Optimization. Kluwer, 1992.
- 45. M.E. Harr. Reliability-Based Design in Civil Engineering. McGraw-Hill, 1987.

- 46. A.M. Hasofer, N.C. Lind. *Exact and invariant second moment code format.* Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 100:111–121, 1974.
- M. Heitzer, M. Staat. Structural reliability analysis of elasto-plastic structures. w: G.I. Schueller, P. Kafka (eds.), Safety and Reliability. A.A. Balkema, 513–518, 1999.
- 48. M. Heitzer, M. Staat. Direct FEM Limit and Shakedown Analysis with Uncertain Data. w: Proceedings of the ECCOMAS 2000, Barcelona, 11-14 September, CD ROM, paper 483, 2000.
- 49. M. Heitzer, M. Staat. LISA a European Project for FEM-based Limit and Shakedown Analysis. Nuclear Engineering and Design, 206:151–166, 2001.
- 50. M. Hohenbichler, Rackwitz. R. Improvement of second-order reliability estimates by importance sampling. Journal of the Engineering Mechanics, ASCE, 114:2195–2199, 1988.
- 51. M. Hohenbichler, R. Rackwitz. *Non-normal dependent vectors in structural safety*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 107:1227–1238, 1981.
- 52. Sang-Hyo Kim, Seong-Won Na. Response surface method using vector projected sampling points. Structural Safety, 19:3–19, 1997.
- 53. M. Kleiber, J. Knabel, J. Rojek. *Response surface method for probabilistic assessment of metal forming failure*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley.
- 54. M. Kleiber, J. Knabel, J. Rojek. Reliability Assessment in Metal Forming Operations. w: H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, J. Eberhardsteiner (eds.), Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V), July 7-12,2002, Vienna, Austria, wydano na CD, 2002.
- 55. M. Kleiber, J. Knabel, J. Rojek, R. Stocki. Reliability-based analysis of large deformations in metal-forming operations. w: Christian Miehe (ed.), Proc. of IUTAM Symposium on Computational Mechanics of Solid Materials at Large Strains, Stuttgart, August 20-24, 2001, 435-444. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- M. Kleiber, A. Siemaszko, R. Stocki. Interactive stability-oriented reliability-based design optimization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 168:243–253, 1999.
- 57. J. Knabel, J. Rojek, J. Stocki, M. Kleiber. Reliability analysis of sheet metal forming operations by response surface method. w: St. Jendo, K. Doliński, M. Kleiber (eds.), Reliability-based design and optimization, AMAS Workshop – RBO'02, Warsaw, September 23-25, 2002, 211–221. Institute of Fundamental Technological Research, 2003.
- W.T. Koiter. A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures. Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., B., 59:14–34, 1956.
- W.T. Koiter. General theorems for elastic-plastic solids. In Sneddon I.N., Hill R. editors, Progress in Solid Mechanics, Nord-Holland, Amsterdam, 165–221, 1960.
- 60. J.A. König. *Theory of shakedown of elastic plastic structures*. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 18:227–238, 1966.

- J.A. König. A method of Shakedown analysis of frames and arches. Int. J. Solids Structs., 7:327–344, 1971.
- 62. J.A. König. O przystosowaniu się konstrukcji z materiału przejawiającego wzmocnienie. Prace IPPT PAN, 18, 1971.
- 63. J.A. König. Shakedown deflections a finite element approach. Bulg. Ac. Sci. Theoret. Appl. Mech., 3:65–69, 1972.
- 64. J.A. König. Projektowanie konstrukcji sprężysto-plastycznych przy obciążeniach zmiennych. Prace IPPT PAN, 24, 1974.
- J.A. König. On optimum shakedown design. IUTAM Symp. Optim. in Struct. Design, 1975.
- 66. J.A. König. On some recent developments in the shakedown theory. Adv. in Mech., 5:237–258, 1982.
- J.A. König. Shakedown of elastic-plastic structures. Elsevier-PWN, Warsaw-Amsterdam, 1987.
- J.A. König, M. Kleiber. On a new method of shakedown analysis. Bull. Ac. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn., 26:165–171, 1978.
- J.A. König, G. Maier. Shakedown analysis of elastoplastic structures, a review of recent developments. Nucl. Eng. Design, 66:81–95, 1981.
- P.-L. Liu, A. Der Kiureghian. Optimization algorithms for structural reliability. Structural Safety, 9:161–177, 1991.
- 71. H.O. Madsen, S. Krenk, Lind N.C. Methods of Structural Safety. Prentice-Hall, 1986.
- 72. G. Maier. Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and non-associated flow-laws: a finite element, linear programming approach. Meccanica, 4:1–11, 1969.
- 73. G. Maier. A matrix structural theory of piecewiselinear elastoplasticity with interacting yield planes. Meccanica, 5:54–66, 1970.
- 74. G. Maier. Mathematical programing method in analysis of elastic-plastic structures. Arch.Inz.Lad, 31:387, 1975.
- 75. A. Makinouchi, E. Nakamachi, E. Oñate, R.H. Wagoner (eds.). Proceedings of the 2nd International Conference NUMISHEET 93: Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes – Verification of Simulation with Experiment. Isehara, Japan, 1993.
- 76. E. Melan. Zur Plastizität des raumlichen Kontinuums. Ing. Archiv., 9:116–126, 1938.
- R.E. Melchers. Simulation in time-invariant and time-variant reliability problems. w: R. Rackwitz, P. Thoft-Christensen (eds.), Reliability and Optimization of Structural Systems '91, Proc. 4th IFIP WG 7.5 Conf., Munich, 11–13 September 1991, 39–82. Springer-Verlag, 1992.

- 78. R.E. Melchers. Structural Reliability Analysis and Predictions, 2nd Ed. Wiley, 1999.
- 79. A. Mohamed, M. Lemaire. Improved response surface method using second order sensitivity operators. w: R.E Melchers, M. Stewart (eds.), Application of Statistics and Probability. Proceeding ICASP', 117–124. Balkema, Rotterdam, 1999.
- 80. J.M. Murzewski. Niezawodność konstrukcji inżynierskich. Arkady, 1989.
- 81. R.H. Myers. Response Surface Methodology. Allen and Bacon, Boston, 1971.
- 82. R.H. Myers, D.C. Montgomery. Response Surface Methodology, Process and Product Optimization Using Designed Experiments. Wiley, 2002.
- B.G. Neal. Plastic collapse and shakedown theorems for structures of strainhardening material. J. Aero. Sci., 17, 1950.
- E. Onate, P. Cendoya, J. Rojek, J. Miquel. A Simple Thin Shell Triangle with Translational Degrees of Freedom for Sheet Stamping Analysis. Mat. 3. Konf. NUMISHEET, Dearborn-Michigan, 1996.
- 85. Z. Polański. Planowanie doświadczeń w technice. PWN, Warszawa, 1984.
- A.R.S. Ponter, H.F. Chen. Shakedown and limit analyses for 3-D structures using the linear matching method. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 78:443–451, 2001.
- William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling. Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 1986.
- 88. J. Putresza. Optymalizacja konstrukcji z uwzględnieniem jej niezawodności. Praca Dokt., IPPT PAN, 1992.
- 89. S. Pycko. Variable loading and imposed displacements in the shakedown theory. Prace IPPT, Praca Doktorska, 1993.
- S. Pycko, Z. Mróz. Alternative approach to shakedown as a solution of min-max problem. Acta Mechanica, 93:205-222, 1992.
- R. Rackwitz. Response surfaces in structural reliability. w: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Heft 67/1982, TU München, München, 1982.
- R. Rackwitz, B. Fiessler. Structural reliability under combined random load sequences. Computers and Structures, 9:484–494, 1978.
- M.R. Rajashekhar, B.R. Ellingwood. A new look at the response surface approach for reliability analysis. Structural Safety, 12:205–220, 1993.
- 94. Ch.P. Robert, G. Casella. Monte Carlo Statistical Methods. Springer, 1999.

- 95. J. Rojek, J. Knabel, M. Kleiber. Ocena prawdopodobieństwa pękania blachy w procesie tłoczenia. w: F. Grosman, A. Piela, J. Kusiak, M. Pietrzyk (eds.), Informatyka w technologii metali, Materiały X Jubileuszowej Konferencji Informatyka w Technologii Metali, Kom-PlasTech2003, Wisła Jawornik, 12-15 stycznia, 2003, 169–176. Wydawnictwo Naukowe Akapit, Kraków, 2003.
- 96. J. Rojek, A. Piela. Weryfikacja wyników numerycznej symulacji procesu tłoczenia część I: tłoczenie jednorodnych blach głębokotłocznych. IX Konferencja Informatyka w Technologii Metali, 2002.
- M. Rosenblatt. Remarks on multivariate transformation. The Annals of Mathematical Statistics, 23:470–472, 1952.
- A. Sawczuk. Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells. J. Mech. Phys. Solids, 17:291–301, 1969.
- G.I. Schuëller, R. Stix. A critical appraisal of methods to determine failure probabilities. Structural Safety, 4:293–309, 1987.
- 100. S. Shao, Y. Murotsu. Reliability evaluation methods for systems with complex limit states.
  w: R. Rackwitz, P. Thoft-Christensen (eds.), Reliability and Optimization of Structural Systems '91, Proc. 4th IFIP WG 7.5 Conf., Munich, 11–13 September 1991, 325–338.
  Springer-Verlag, 1992.
- A. Siemaszko. On stability of incremental collapse process. 24-th Polish Solid Mechanics Conference, Jachranka, 1983.
- 102. A. Siemaszko, G. Bielawski, J. Knabel. Shakedown And Limit Reliability-Based Design. SmiRT-16 Structural Mechanics in Reactor Technology, Washington, DC USA, August 12-17, na CD, 2001.
- 103. A. Siemaszko, G. Bielawski, J. Zwoliński. CYCLONE system for structural adaptation and limit analysis. EUROMECH 385, Inelastic Analysis of Structures, 2000.
- 104. A. Siemaszko, J.A. König. Analysis of stability of incremental collapse of skeletal structures. J. Struct. Mech., 13:301–321, 1985.
- 105. P. Śniady, R. Sieniawska, S. Żukowski. Niezawodnosc belek sprezysto-plastycznych poddanych dzialaniu losowych obciazen zmiennych. Badania Nosnosci Granicznej Konstrukcji Metalowych, Wroclaw- Karpacz, 193–200, 2002.
- 106. P. Śniady, R. Sieniawska, S. Żukowski. Reliability of bridge beams with hybrid crosssections. Arch. of Civ. and Mech. Eng., Vol.III, No.1, 13–23, 2003.
- 107. P. Śniady, S. Żukowski. Niezawodność konstrukcji prętowych w aspekcie teorii przystosowania. Metody Komputerowe w Mechanice, Kraków-Rytro, 1001–1008, 1989.
- 108. P. Śniady, S. Żukowski. The reliability of elastic-plastic structures under time-dependent load. Structural Safety and Reliability, Ed: G.I.Schueller, M. Shinozuka, J.T.P. YAO, Proceedings of ICOSSAR'93, Innsbruck, 1407–1410, 1994.

- 109. P. Śniady, S. Żukowski. The reliability and design sensitivity of frames under time-varying loads. Applications of Statistics and Probability, ICASP7, Paris, 453–458, 1995.
- 110. N. Stander. The successive response surface method applied to sheet-metal forming. Computational Fluid and Solid Mechanics, Elsevier, Bathe, K.J.(eds.), 481–485, 2001.
- 111. R. Stocki. Optymalizacja niezawodnościowa konstrukcji prętowych w zakresie dużych przemieszczeń, teoria i program komputerowy. Prace IPPT, Praca Doktorska, 1999.
- R. Stocki, A. Siemaszko, M. Kleiber. Interactive methodology for reliability-based structural design and optimization. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 6:39–62, 1999.
- 113. P. Tauzowski, M. Kleiber. Sensitivity analysis for viscoelastic bodies in object oriented finite element environment. CAMES, 10:223–238, 2003.
- 114. P. Thoft-Christensen, M.J. Baker. Structural Reliability Theory and its Applications. Springer-Verlag, 1982.
- 115. P. Thoft-Christensen, Y. Murotsu. Application of Structural Systems Reliability Theory. Springer-Verlag, 1986.
- 116. L. Tvedt. Distribution of quadratic forms in normal space application to structural reliability. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 116:1183–1197, 1990.
- 117. P.H. Waarts. Structural Reliability using Finite Elelment Methods, An appraisal of DARS: Directional Adaptive Response Surface Sampling. Delft University Press, 2000.
- 118. W. Wierzbicki. W sprawie bezpieczeństwa pręta wyciąganego osiowo. Czasopismo techniczne, 50:273–277, 1937.
- 119. R. Wit. Metody Programowania Nieliniowego. WNT, 1986.
- 120. J. Zarka, C. Casier. Elastic-plastic response of a structure to cyclic loading: Practical rules. Mechanics Today, ed. Nemat-Nasser Pergamon Press, 6:1663–1669, 1979.
- 121. Y. Zhang, A. Der Kiureghian. Finite element reliability methods for inelastic structures. Report No. UCB/SEMM-97/05, Department of Civil & Environmental Engineering, University of California, Berkeley, CA, 1997.
- 122. YG. Zhao, T. Ono. A general procedure for first/second-order reliability method (FORM/SORM). Structural Safety, 21:95–112, 1999.
- 123. YG. Zhao, T. Ono. New approximations for SORM: Part 1. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 125:79–85, 1999.
- 124. YG. Zhao, T. Ono. New approximations for SORM: Part 2. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 125:86–93, 1999.
- 125. T.-L. Zhu. A cell technique for computing the failure probabilities of structural systems. Computers and Structures, 46:1001–1005, 1993.

- 126. R. Zieliński. Wybrane zagadnienia optymalizacji statystycznej. PWN, Warszawa, 1982.
- 127. J. Zwoliński, G. Bielawski. An optimal selection of residual stress for shakedown and limit load analysis. w: Proc.Conf. Comp. Meth.Struct. Mech., Jadwisin, 459–462, 1987.